Factorización II

MÉTODO DE LAS IDENTIDADES

Este método se basa en los productos notables, es decir: si se nos proporciona un polinomio cuya forma conocemos, podemos escribir la multiplicación indicada de factores que le dio origen.

¿Sabías que?

Los signos (+); (-) en el Siglo XVII para representarlos se usaban las letras P de plus para la suma y M de minus para la resta respectivamente.

A. DIFERENCIA DE CUADRADOS

$$\boxed{a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)}$$

Factorizar:

➡ $9x^2 - 16$

Solución:

Extraemos la raíz cuadrada a ambos términos.

$$\sqrt{9x^2} = \sqrt{9}\,\sqrt{x^2} = 3x$$
$$\sqrt{16} = 4$$

La expresión factorizada será:

$$9x^2 - 16 = (3x + 4)(3x - 4)$$

Factorizar:

➡ $E = 16x^4 - 81$

Solución:

Escribiendo la diferencia de cuadrados dada como la suma por la diferencia de sus cuadrados.

$$E = \underset{\substack{\sqrt{\ }\\ \downarrow \\ 4x^2}}{16x^4} - \underset{\substack{\sqrt{\ }\\ \downarrow \\ 9}}{81}$$

$$E = (4x^2 + 9)(4x^2 - 9)$$

Recuerda que:

Al extraer raíz cuadrada de variables, aplicamos exponente fraccionario es decir:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Por ejemplo:

$$\sqrt{x^8} = x^{8/2} = x^4$$

El primer factor $(4x^2 + 9)$ es primo; el segundo factor obtenido $(4x^2 - 9)$ no lo es:

$$E = (4x^2 + 9)(4x^2 - 9)$$

$\sqrt{\ }$ → $2x$ $\sqrt{\ }$ → 3

$$E = (4x^2 + 9)(2x + 3)(2x - 3)$$

A. TRINOMIO CUADRADO PERFECTO

$$\boxed{a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2}$$

$\sqrt{\ }$ → a $\sqrt{\ }$ → b

a → $2ab$ ← b

Factorizar:

➨ $M = 4x^2 + 12x + 9$

$\sqrt{\ }$ → $2x$ $\sqrt{\ }$ → 3

$2x$ → $2(2x)(3)$ ← 3

El polinomio M factorizado se escribe como el cuadrado de la suma de las raíces.

$$M = (2x + 3)^2$$

Cuidado:

La expresión $(2x + 3)^2$ equivale a escribir:

$$(2x + 3)(2x + 3)$$

Factorizar:

➨ $N = x^2 + 10xy + 25y^2$

$\sqrt{\ }$ → x $\sqrt{\ }$ → $5y$

$2(x)(5y)$

$$N = (x + 5y)^2$$

Factorizar:

➨ $P = m^{16} - 2m^8t^2 + t^4$

$\sqrt{\ }$ → m^8 $\sqrt{\ }$ → t^2

$2(m^8)(t^2)$

Si el doble producto de las raíces de los extremos es negativo. La expresión factorizada es el cuadrado de la diferencia de las raíces.

$$P = (m^8 - t^2)^2$$

B. SUMA Y DIFERENCIA DE CUBOS

$$\boxed{a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)}$$

$$\boxed{a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)}$$

Factorizar:

➨ $E = a^6 + 125$

Solución:

- Raíz cúbica del 1° Término

$$\sqrt[3]{a^6} = a^{6/3} = a^2$$

- Raíz cúbica del 2° Término

$$\sqrt[3]{125} = 5$$

- La suma de estas dos raíces cúbicas constituyen el primer factor buscado.

$$E = a^6 + 125 = (a^2 + 5)(\qquad)$$

- El factor trinomio se calcula así:
  - Los términos extremos son los cuadrados de los términos del factor binomio.

$$E = a^6 + 125 = (a^2 + 5)(a^4 \qquad + 25)$$

  - El término central es el producto de los términos del factor binomio con el signo cambiado.

$$E = (a^2 + 5)(a^4 - 5a^2 + 25)$$

Factorizar:

➨ $F = 27x^9 - 8y^6$

Solución:

- Raíz cúbica del 1° término.

$$\sqrt[3]{27x^9} = \sqrt[3]{27} \,.\, \sqrt[3]{x^9} = 3x^3$$

- Raíz cúbica del 2° término.

$$\sqrt[3]{8y^6} = \sqrt[3]{8}\ \sqrt[3]{y^6} = 2y^2$$

$$E = (3x^3 - 2y^2)(9x^6 + 6x^3y^2 + 4y^4)$$

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

Factoriza:

1. $a^4 - b^2 = (\qquad)(\qquad)$

2. $25x^2 - 9y^2 = (\qquad)(\qquad)$

3. $x^2 + 12x + 36 = (\qquad)^2$

4. $49a^2 - 28a + 4 = (\qquad)^2$

5. $x^2 - 10xy + 25y^2 = (\qquad)^2$

6. $m^2 + 14mn + 49n^2 = (\qquad)^2$

7. $8y^3 + 1 = (\quad + \quad)(\quad^2 - \qquad + \quad^2)$

8. $x^3y^3 + 8 = (\quad + \quad)(\quad^2\quad^2 - \qquad + \quad^2)$

9. $m^3 - r^3 = (\quad - \quad)(\quad^2 + \qquad + \quad^2)$

MÉTODO ASPA SIMPLE

Si un polinomio no tiene las características de un trinomio cuadrado perfecto entonces podría ser factorizado por aspa simple.

Factorizar:

$$\boxed{6x^2 + 11x + 4}$$

- Descomponemos el término $6x^2$ en dos factores que multiplicados nos permitan volver a obtener $6x^2$.

- Descomponemos el término 4 en dos factores que multiplicados nos permitan volver a obtener 4.

Es decir:

$$\begin{array}{lll} 6x^2 & + \; 11x \; + & 4 \\ 3x & & 4 \\ 2x & & 1 \end{array}$$

- Hallamos la suma de los productos en aspa de los cuatro términos hallados:

$$\begin{array}{lllll} 6x^2 & + \; 11x \; + & 4 & & \\ 3x & & 4 & \rightarrow & 8x \\ 2x & & 1 & \rightarrow & 3x \\ & & & & 11x \end{array}$$

Recuerda que:

Factorizar un polinomio es transformarlo en una multiplicación indicada de factores primos.

¿Sabías que?

El máximo número de factores primos a obtenerse en una factorización es dado por el grado absoluto del polinomio.

Como la suma coincide con el término central tomamos los factores en forma horizontal.

Es decir:

$6x^2 + 11x + 4 = (3x + 4)(2x + 1)$

$3x \longrightarrow 4$

$2x \longrightarrow 1$

Observación:

- $6x^2$ se pude escribir así: $(6x)(x)$
- 4 se puede escribir así: $(+2)(+2)$

  Pero ello no verifica el término central.

Factorizar:

$$N = 18x^4 + 5 + 21x^2$$

Ordenando el polinomio:

$$N = 18x^4 + 21x^2 + 5$$

Cuidado

Si el polinomio es de una sola variable, entonces debe estar ordenado en cuanto a los exponentes de dicha variable, este orden puede ser ascendente o descendente.

Descomponemos los términos extremos:

$N = 18x^4 + 21x^2 + 5$

$6x^2 \quad +5$

$3x^2 \quad +1$

$N = (6x^2 + 5)(3x^2 + 1)$

Factorizar:

$$R = 100x^2 + 91xy + 12y^2$$

Cuando los términos extremos tengan muchos divisores es preferible colocar todas las posibilidades.

$R = 100x^2 + 91xy + 12y^2$

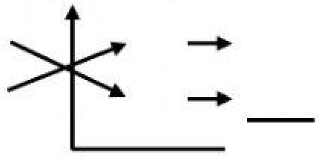
25	10	20	50	100		6	4	12
4	10	5	2	1		2	3	1

$R = (25x + 4y)(4y + 3y)$

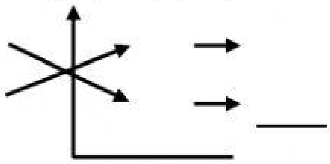
EJERCICIOS DE APLICACIÓN

Factorizar:

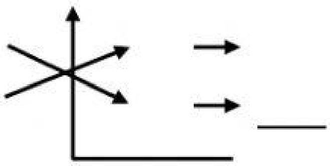
1. $x^2 + 9x + 20 = (\qquad)(\qquad)$



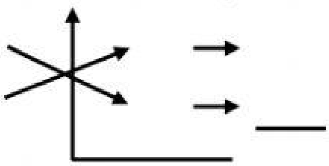
2. $a^2 + 12a + 32 = (\qquad)(\qquad)$



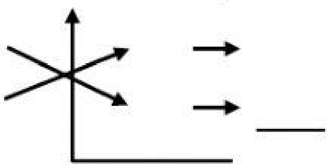
3. $a^2 - 7a + 12 = (\qquad)(\qquad)$



4. $b^2 - 11b + 18 = (\qquad)(\qquad)$



5. $z^2 - 6z - 27 = (\qquad)(\qquad)$



6. $y^2 - 10y + 21 = (\qquad)(\qquad)$