

 Departamento de Aplicación Docente	Matemática IV	Profesoras: - Eugenia Tonidandel - Silvina Mozas - Vanina Iannizzotto
Cursos: 4° año	Tema: "OPERACIONES EN $\mathbb{C}$"	Año: 2020

OPERACIONES CON NÚMEROS COMPLEJOS

En el tema de números complejos, vamos a ir revisando juntos a lo largo de las distintas actividades, los siguientes temas:

- **Adición de números complejos.**
- **Sustracción de números complejos.**
- **Multiplicación de números complejos.**

➤ ADICIÓN DE NÚMEROS COMPLEJOS:

https://youtu.be/FQPN_V04DU

La suma es una operación en $\mathbb{C}$, es decir que la suma de dos números complejos es siempre otro número complejo.

- Se suman las partes reales
- Se suman las partes imaginarias.

$$(a + b i) + (c + d i) = (a + c) + (b + d) i$$

Por ejemplo:

Resolver:

$$\begin{aligned}
 1) \quad (-3 + 3i) + (7 - 2i) &= && \text{(Eliminamos paréntesis)} \\
 -3 + 3i + 7 - 2i &= && \text{(Aplicamos propiedad conmutativa)} \\
 -3 + 7 + 3i - 2i &= && \text{(Aplicamos propiedad asociativa y factor común, sumando términos semejantes)} \\
 (-3 + 7) + (3 - 2)i &= && \text{semejantes} \\
 4 + 1i &= && \text{(Resolvemos términos semejantes)}
 \end{aligned}$$

 Departamento de Aplicación Docente	Matemática IV	Profesoras: - Eugenia Tonidandel - Silvina Mozas - Vanina Iannizzotto
Cursos: 4° año	Tema: "OPERACIONES EN $\mathbb{C}$"	Año: 2020

2) De la misma manera podemos sumar números Complejos con parte real irracional:

$$(6\sqrt{3} + 8i) + (4\sqrt{3} + 2i) =$$

$$(6\sqrt{3} + 4\sqrt{3}) + (8 + 2)i =$$

$$10\sqrt{3} + 10i$$

➤ **SUSTRACCIÓN O RESTA DE NÚMEROS COMPLEJOS:**

<https://youtu.be/txlel1NUtJM>

La resta de dos números complejos es otro número que se obtiene sumando al minuendo el opuesto del sustraendo.

$$(a + bi) - (c + di) = \text{Sumo el opuesto}$$

$$(a + bi) + (-c - di) = \text{Resuelvo como una suma}$$

$$(a - c) + (b - d)i$$

Por ejemplo:

Resolver:

$$1) \quad (-3 + 3i) - (7 - 2i) = \quad (\text{Sumamos el opuesto})$$

$$-3 + 3i + (-7 + 2i) = \quad (\text{Aplicamos propiedad conmutativa})$$

$$-3 - 7 + 3i + 2i = \quad (\text{Aplicamos propiedad asociativa y factor común, sumando términos semejantes})$$

$$(-3 - 7) + (3 + 2)i = \quad \text{semejantes}$$

$$-10 + 5i \quad (\text{Resolvemos términos semejantes})$$

 Departamento de Aplicación Docente	Matemática IV	Profesoras: • Eugenia Tonidandel • Silvina Mozas • Vanina Iannizzotto
Cursos: 4° año	Tema: "OPERACIONES EN $\mathbb{C}$"	Año: 2020

1) Resolver las siguientes operaciones en el cuadernillo o carpeta y unir con flechas el resultado correcto:

- | | |
|--|-------------------------------------|
| a) $(3 - 6i) + (-4 - 5i) =$ | • $z = 0$ |
| b) $(1 - i) - (7 + 3i) =$ | • $z = 10 + 12i$ |
| c) $7 + (2 + 3i) - (-1 - 9i) =$ | • $z = \frac{7}{15} - \frac{8}{3}i$ |
| d) $(\sqrt{3} - i) - (\sqrt{3} - i) =$ | • $z = -6 - 4i$ |
| e) $\left(\frac{2}{3} - 4i\right) - \left(\frac{1}{5} - \frac{4}{3}i\right) =$ | • $z = -1 - 11i$ |

➤ **MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS COMPLEJOS:**

- Multiplicación de números complejos "Imaginarios puros"

Por ejemplo:

Resolver:

$$(3i) \cdot (-2i) = \quad \text{(Aplicamos propiedad conmutativa)}$$

$$3 \cdot (-2) \cdot (i) \cdot (i) = \quad \text{(Aplicamos propiedad suma de potencias de igual base)}$$

$$-6 \cdot \boxed{i^2} = \longrightarrow i^2 = -1 \quad \text{(Por definición)}$$

$$-6 \cdot (-1) =$$

6

Observa que el producto de dos números imaginarios puros es un número real

 Departamento de Aplicación Docente	Matemática IV	Profesoras: - Eugenia Tonidandel - Silvina Mozas - Vanina Iannizzotto
Cursos: 4° año	Tema: "OPERACIONES EN $\mathbb{C}$"	Año: 2020

- Multiplicación de números complejos**

Recordemos multiplicación de expresiones algebraicas usando la propiedad distributiva:

$$\begin{aligned}
 (6x + 8)(4x + 2) &= 6x(4x) + 6x(2) + 8(4x) + 8 \cdot (2) \\
 &= 24x^2 + 12x + 32x + 16 \\
 &= 24x^2 + 44x + 16
 \end{aligned}$$

La multiplicación es una operación en $\mathbb{C}$, es decir que la multiplicación de dos números complejos es siempre otro número complejo.

Para definir el producto de los complejos $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$

Se tiene en cuenta que se mantiene la validez de la **propiedad distributiva**, entonces cuando las componentes están expresadas en forma **binómica**, se multiplican como si fuesen binomios comunes, tomando en cuenta que el producto de las componentes imaginarias es un número real, ya que $i^2 = -1$

Entonces para multiplicar los complejos $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$ se procede de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 (a + bi) \cdot (c + di) &= a \cdot c + adi + bci + bdi^2 \\
 &= a \cdot c + adi + bci + bd \cdot (-1)
 \end{aligned}$$

Por ejemplo:

Resolver:

1)

$$\begin{aligned}
 (6 + 8i) \cdot (4 + 2i) &= 6 \cdot 4 + 6 \cdot 2i + 8i \cdot 4 + 8i \cdot 2i \\
 &= 24 + \underbrace{12i + 32i}_{44i} + 16i^2 \\
 &= 24 + 44i + 16(-1) \quad \swarrow \\
 &= 24 + 44i - 16 \\
 &= 8 + 44i
 \end{aligned}$$

 Departamento de Aplicación Docente	Matemática IV	Profesoras: - Eugenia Tonidandel - Silvina Mozas - Vanina Iannizzotto
Cursos: 4° año	Tema: "OPERACIONES EN $\mathbb{C}$"	Año: 2020

2)

$$\begin{aligned}
 (6 + 8i) \cdot (6 - 8i) &= 6 \cdot 6 + 6 \cdot (-8i) + 8i \cdot 6 + 8i \cdot (-8i) \\
 &= 6^2 - 48i + 48i - (8i)^2 \\
 &= 6^2 - (8i)^2 \\
 &= 36 - 64i^2 \\
 &= 36 - 64 \cdot (-1) \\
 &= 36 + 64 \\
 &= 100
 \end{aligned}$$

Responder:

a) ¿Cómo son los números complejos $6 + 8i$ y $6 - 8i$?.....

b) ¿Podríamos hacer el ejemplo 2) de una forma más sencilla?.....

$$\begin{aligned}
 (6 + 8i) \cdot (6 - 8i) &= 6 \cdot 6 + 6 \cdot (-8i) + 8i \cdot 6 + 8i \cdot (-8i) \\
 &= 6^2 - 48i + 48i - (8i)^2 \\
 &= 6^2 - (8i)^2 \\
 &= 6^2 - 8^2 i^2 \\
 &= 6^2 - 8^2 \cdot (-1) \\
 &= 6^2 + 8^2 \\
 &= 36 + 64 \\
 &= 100
 \end{aligned}$$

Estos pasos se pueden suprimir

Se puede generalizar entonces, enunciando la regla general:

El producto entre un número complejo y su conjugado es un número real:

$$z \cdot \bar{z} = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 + b^2$$

Es decir, que el producto de dos complejos conjugados es igual a la suma de los cuadrados de sus componentes

 Departamento de Aplicación Docente	Matemática IV	Profesoras: • Eugenia Tonidandel • Silvina Mozas • Vanina Iannizzotto
Cursos: 4° año	Tema: "OPERACIONES EN $\mathbb{C}$"	Año: 2020

2) Efectuar las siguientes multiplicaciones y ubicar el resultado en forma correcta:

a) $i \cdot (-1 - 4i) =$

b) $(-5 + 4i) \cdot (-3i) =$

c) $\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i\right) \cdot \left(-\frac{3}{4} - \frac{2}{5}i\right) =$

d) $(-6 + 8i) \cdot (6 - 8i) =$

$z = -i + 4$ $z = 12 + 15i$

$z = \frac{9}{40} - \frac{53}{40}i$ $z = 20 + 96i$

3) Resolver las siguiente multiplicaciones en el cuadernillo o carpeta y señalar la respuesta correcta:

a) $(2 - 3i) \cdot (2 + 3i) =$

b) $(\sqrt{2} - \sqrt{3}i) \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{3}i) =$

c) $(1 - 5i) \cdot (1 + 5i) =$

d) $(2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}i) \cdot (2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}i) =$