

Cocientes Notables

Son cocientes que provienen de divisiones exactas de la forma:

$$\frac{x^n \pm y^n}{x \pm y}$$

Se pueden escribir en forma directa sin efectuar la operación indicada.

Ejemplo:

Si se aplica el teorema del resto a las divisiones de $(x^7 \pm y^7)$ A $(x^8 \pm y^8)$ por $(x \pm y)$, se tiene:

1ro. Para el divisor $x + y$

Dividendo	Divisor	Residuo
$x^7 + y^7$	$x + y$	$-y^7 + y^7 = 0$
$x^7 - y^7$		$-y^7 - y^7 = -2y^7$
$x^8 + y^8$		$+y^8 + y^8 = 2y^8$
$x^8 - y^8$		$+y^8 - y^8 = 0$



Se deduce que $x^7 - y^7$ y $x^8 - y^8$ son divisibles entre $x - y$.

Lo anterior puede resumirse así:

- $x^n + y^n \div x + y$ es exacto cuando n es impar.
- $x^n - y^n \div x + y$ es exacto cuando n es par.
- $x^n + y^n \div x - y$ no es exacto (sea n par o impar).
- $x^n - y^n \div x - y$ siempre es exacto (sea n par o impar).

Los coeficientes que resultaron exactos son los llamados cocientes notables.

I) $\frac{x^n - y^n}{x - y} = \text{C.N.}$; donde n es par o impar.

$$\frac{x^n - y^n}{x - y} = x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1}$$

Ejemplo:

$$\frac{x^5 - y^5}{x - y} = x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4$$

II) $\frac{x^n + y^n}{x + y} = \text{C.N.}$; cuando n es impar.

$$\frac{x^n + y^n}{x + y} = x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \dots - xy^{n-2} + y^{n-1}$$

Ejemplo:

$$\frac{x^5 + y^5}{x + y} = x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4$$

III) $\frac{x^n - y^n}{x + y} = \text{C.N.}$; cuando n es par.

$$\frac{x^n - y^n}{x + y} = x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \dots + xy^{n-2} - y^{n-1}$$

Ejemplo:

$$\frac{x^4 - y^4}{x + y} = x^3 - x^2y + xy^2 - y^3$$

IV) $\frac{x^n + y^n}{x - y} = \text{no es C.N.}$

Sea n par o impar.



OBSERVACIONES

1. El desarrollo del cociente notable tiene n términos.
2. El grado del cociente es $n - 1$. El cociente es un polinomio homogéneo.
3. Si el divisor es $x - y$ todos los términos son positivos, mientras que si el divisor es $x + y$ los términos tienen signos alternados.
4. Los exponentes de la 1ra variable (x) disminuyen de uno en uno y los exponentes de la 2da variable (y) van aumentando de uno en uno.

TÉRMINO GENERAL

Si: $\frac{x^n \pm y^n}{x \pm y}$ es un C.N. se puede calcular un término cualquiera, como:

$$T_k = (\text{signo})x^{n-k}y^{k-1}$$

El signo se colocará de acuerdo al caso que corresponda.

Ejemplo:

El quinto término de $\frac{a^{12}-b^{12}}{a-b}$ es:

$$n = 12, k = 5$$

$$T_5 = (+) a^{12-5} \cdot b^{5-1}$$

$$T_5 = a^7 \cdot b^4$$

Observación:

$\frac{x^p \pm y^q}{x^r \pm y^s}$ da lugar a un C.N. si cumple:

$$\frac{p}{r} = \frac{q}{s} = \# \text{ de Términos}$$

Algunos ejemplos:

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{p^5 - q^5}{p - q} &= p^{5-1}q^0 + p^{5-2}q^1 + p^{5-3}q^2 + p^{5-4}q^3 + p^{5-5}q^4 \\ &= p^4 + p^3q + p^2q^2 + p^1q^3 + q^4 \end{aligned}$$

← El cociente tiene 5 términos.

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{16x^4 - 625y^8}{2x + 5y^2} &= \frac{(2x)^4 - (5y^2)^4}{2x + 5y^2} = (2x)^3(5y^2)^0 - (2x)^2(5y^2)^1 + (2x)^1(5y^2)^2 - (2x)^0(5y^2)^3 \\ &= 8x^3 - 20x^2y^2 + 50x^1y^4 - 125y^6 \end{aligned}$$

← El cociente tiene 4 términos.

$$\begin{aligned} \text{c) } \frac{a^7 + b^7}{a + b} &= a^{7-1}b^0 + a^{7-2}b^1 + a^{7-3}b^2 + a^{7-4}b^3 + a^{7-5}b^4 + a^{7-6}b^5 + a^{7-7}b^6 \\ &= a^6 + a^5b + a^4b^2 + a^3b^3 + a^2b^4 + ab^5 + b^6 \end{aligned}$$

← El cociente tiene 7 términos.

Cocientes Notables

1. Determina el número de términos que tiene el siguiente cociente notable:

$$\frac{x^{16} - y^{40}}{x^2 - y^5}$$

- a. 2 b. 4 c. 5 d. 7 e. 8

2. Si la siguiente expresión es un cociente notable, calcula el valor de "n".

$$\frac{x^{24} - y^{42}}{x^n + y^7}$$

- a. 1 b. 2 c. 3 d. 4 e. 5

3. Calcula el valor de "a", si la siguiente expresión es un C.N.

$$\frac{x^a - y^{48}}{x^5 + y^8}$$

- a. 10 b. 24 c. 30 d. 12 e. 28

4. Calcula el valor de "m" para que la siguiente expresión sea un C.N.

$$\frac{x^{3m} - 2^{51}}{x^3 - 2^3}$$

- a. 12 b. 15 c. 17 d. 18 e. 20

5. Determina el desarrollo del siguiente cociente notable:

$$\frac{x^4 - y^4}{x - y}$$

- a. $x^3 - x^2y + xy^2 - y^3$
b. $x^4 + x^3y^2 + x^2y^3 + xy^4$
c. $x^3 + x^2y + xy^2 + y^3$
d. $x^4 - x^3y^2 + x^2y^3 - xy^4$
e. $x^3 - x^2y - xy^2 - y^3$

6. Determina el desarrollo del siguiente cociente notable:

$$\frac{x^6 - y^6}{x + y}$$

- a. $x^4 - x^3y + xy^3 - y^4$
b. $x^5 - x^4y + x^3y^2 - x^2y^3 + xy^4 - y^5$
c. $x^4 + x^2y + xy^3 + y^4$
d. $x^5 + x^4y + x^3y^2 + x^2y^3 + xy^4 + y^5$
e. $x^5 + x^4y - x^3y^2 + x^2y^3 - xy^4 + y^5$

7. Determina el desarrollo del siguiente cociente notable:

$$\frac{x^5 - y^5}{x - y}$$

- a. $x^5 - x^4y^2 + x^2y^2 - xy^4 + y^5$
b. $x^4 + x^3y - x^2y^2 + xy^3 - y^4$
c. $x^4 + x^2y + xy^3 + y^4$
d. $x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4$
e. $x^5 + x^4y - x^3y^2 + x^2y^3 - xy^4 + y^5$

8. En el siguiente cociente notable :

$$\frac{x^{60} - y^{60}}{x - y}$$

calcula el término de lugar 15.

- a. $x^{45}y^{14}$ c. $x^{40}y^{24}$ e. $x^{30}y^{28}$
b. $-x^{45}y^{14}$ d. $-x^{40}y^{24}$

9. Calcula el término de lugar 18 en el desarrollo del cociente notable.

$$\frac{x^{80} - y^{80}}{x - y}$$

- a. $x^{62}y^{17}$ c. $x^{60}y^{19}$ e. $x^{48}y^{12}$
b. $x^{50}y^{54}$ d. $x^{50}y^{32}$