Екстремални задачи в алгебрата

Задача: Представете числото 18 като сума на три положителни събираеми със следните свойства: отношението на първите две събираеми да бъде 1:2, а сборът от произведението на първите две числа и умноженото с 4 трето число да бъде възможно най-малък. Намерете този сбор.

1. Избор на променлива

$$a + b + c = 18$$
$$\frac{a}{b} = \frac{1}{2} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} a = x \\ b = 2x \end{array} \right.$$
$$\Rightarrow x + 2x + c = 18 \Rightarrow c = 18 - 3x$$

2. Съставяне на аналитичен израз

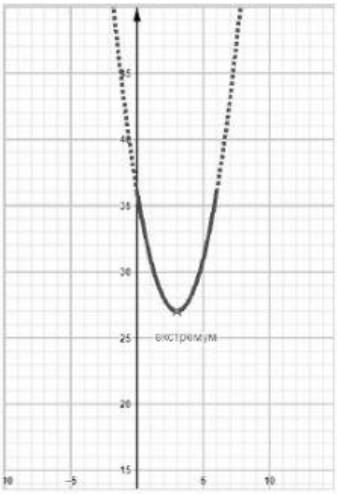
$$M = ab + 4c = x.2x + 4(18 - 3x) = 2x^2 + 72 - 12x$$

3. Определение на функцията $y = f(x), \quad x \in DM$

$$\left| \begin{array}{l} a > 0 \\ b > 0 \\ c > 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{c} x > 0 \\ 2x > 0 \\ 18 - 3x > 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x > 0 \\ x < 6 \end{array} \right. \Rightarrow x \in (0; 6)$$

LIVEWORKSHEETS

$M = 2x^2 - 12x + 72 = 2(x^2 - 6x + 36)$
$f(x) = x^2 - 6x + 36, DM: x \in (0; 6)$



4. Решаване на екстремална задача

I начин

$f(x) = x^2 - 6x + 36, DM: x \in (0; 6)$
$a = 1; b = -6; c = 36$

- $a = 1 > 0 \Longrightarrow$
- $x_0 = -\frac{b}{2a} = -\left(\frac{-6}{2.1}\right) = 3$
  $\Rightarrow \min\limits_{x \in (0;6)} f(x) = f(3) = 27$
  $M = 2f(x) \geq 2.27 \Rightarrow M \geq 54$

https://www.geogebra.org/graphing/upgnxuk8

II начин

$M = 2x^2 - 12x + 72 = x^2 + 36 - 12x + x^2 + 36 = x^2 + (6 - x)^2 + 36$

Прилагаме неравенството между средноквадратично и средноаритметично

$\sqrt{\frac{p^2+q^2}{2}} \geq \frac{p+q}{2}$ при $p > 0, q > 0$ като равенство се достига при $p = q$

При $p = x, q = 6 - x$ получаваме

$$\Rightarrow \frac{x^2 + (6-x)^2}{2} \geq \left(\frac{x + (6-x)}{2}\right)^2 \Rightarrow x^2 + (6-x)^2 \geq 2\left(\frac{x + 6 - x}{2}\right)^2 = 2.3^2 = 18$$

$\Rightarrow M \geq 18 + 36 \Rightarrow M \geq 54$

НМС на M се получава при $p = q \Rightarrow x = 6 - x \Rightarrow x = 3$

5. Извод

$$\left| \begin{array}{l} a = x = 3 \\ b = 2x = 6 \\ c = 18 - 3x = 9 \end{array} \right.$$

$\Rightarrow 18 = 3 + 6 + 9$

и

$\min(ab + 4c) = 54$

LIVEWORKSHEETS