

LEMBAR KERJA PESERTA DIDIK (LKPD) RUMUS JUMLAH DAN SELISIH DUA SUDUT



Mata Pelajaran : Matematika Peminatan
Jenjang pendidikan : SMA Al-I'tishom
Kelas/Semester : XI MIPA 3/ganjil
Materi Pokok : Rumus jumlah dan selisih sudut
Alokasi Waktu : 2 x 45 Menit



NAMA KELOMPOK :



.....

NAMA ANGGOTA KELOMPOK :

1.

2.

3.

4.

KD 3.2 : Membedakan penggunaan jumlah dan selisih sinus dan cosinus.

Tujuan Pembelajaran :

1. Peserta didik dapat **menentukan** rumus jumlah dan selisih sudut untuk sinus, cosinus, dan tangen.
2. Peserta didik dapat **memecahkan** masalah kontekstual menggunakan rumus jumlah dan selisih sudut untuk untuk sinus, cosinus, dan tangen..

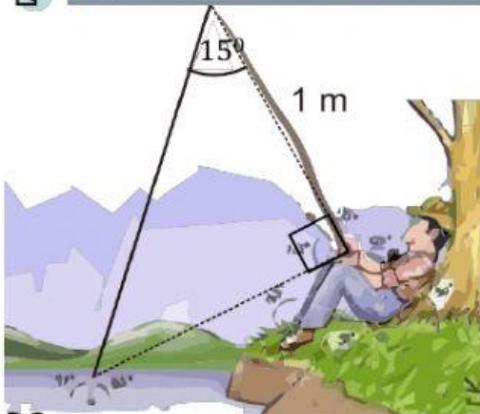
Petunjuk Umum :

Jawablah setiap pernyataan berikut dengan jalan berdiskusi dengan teman sekelompokmu !

A. Rumus Jumlah dan Selisih Dua Sudut



Ayo Belajar Pemecahan Masalah !



Permasalahan 1

Pada gambar 1.1 di atas, seorang memancing ikan dengan panjang galahnya 1 meter. berapakah panjang tali minimal yang dibutuhkan agar pemancing dapat memancing ikan dengan sudut antara galah dengan benang adalah 15° ? (minimal tali dapat menyentuh air)



Ayo Kumpulkan Informasi !

Kendala yang diperoleh pastinya kalian kesulitan dalam menghitung nilai dari $\cos 15^\circ$. Biasanya kalian menghitung nilai trigonometri tanpa kalkulator untuk sudut-sudut istimewa misalnya $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$. Untuk mencari nilai dari $\sin 15^\circ$ tetap menggunakan sudut-sudut istimewa.

$\cos 15^\circ = \cos(\dots - \dots)$ (Ubah 15° dalam penjumlahan sudut istimewa)

Jika $\alpha = 45^\circ$ dan $\beta = 30^\circ$

Jadi, berapa nilai $\cos(\alpha - \beta)$?

1. Menentukan rumus selisih dua sudut kosinus.



Ayo Ingat !

Salah satu cara untuk mendapatkan rumus umum dari $\cos(\alpha - \beta)$. Kalian harus ingat terlebih dahulu materi perbandingan trigonometri dan luas segitiga.

Ingat !

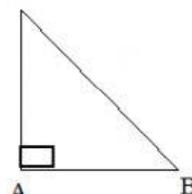
Perbandingan Trigonometri :

$$\sin \angle ABC = \frac{AC}{BC}$$

$$\cos \angle ABC = \frac{AB}{BC}$$

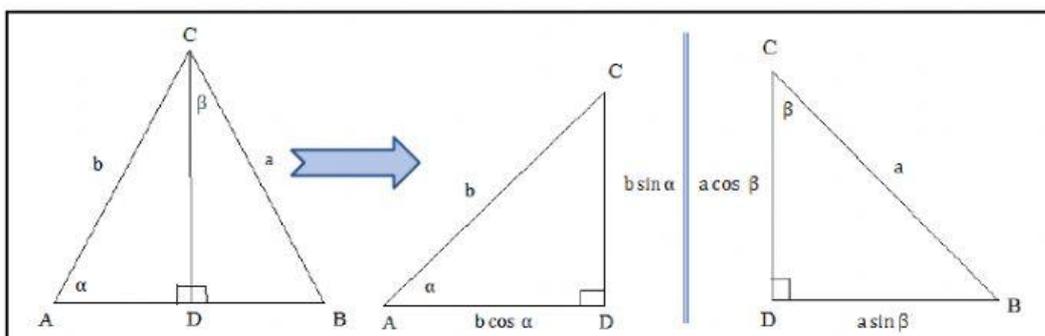
Luas Segitiga :

$$L = \frac{1}{2} \times AB \times AC$$



Amatilah !

Perhatikan Gambar 1.2 segitiga ABC. ΔABC di bawah ini adalah gabungan dari ΔADC dan ΔDBC .



Gambar 1.2. Segitiga ABC



Ayo selesaikan !

Perhatikan gambar 1.2 di atas !

$$\text{Pada } \Delta ABC, \angle BCA = 90^\circ - \alpha + \beta = 90^\circ - (\alpha - \beta)$$

$$\text{Luas } \Delta ABC = \Delta ACD + \Delta CDB$$

$$= \left(\frac{1}{2} \times AD \times CD \right) + \left(\frac{1}{2} \times \dots \times \dots \right)$$

$$= \left(\frac{1}{2} \times \dots \times \dots \right) + \left(\frac{1}{2} \times a \sin \beta \times a \cos \beta \right)$$

$$= \left(\frac{1}{2} \times \dots \times \dots \right) + \left(\frac{1}{2} \times \dots \times \dots \right)$$

$$= \left(\frac{1}{2} ab \cos \alpha \cos \beta \right) + \left(\frac{1}{2} ab \sin \alpha \sin \beta \right) \dots \dots \dots (1)$$

Disisi lain,

$$\begin{aligned}\text{Luas } \Delta ABC &= \frac{1}{2} \times BC \times AC \times \sin \angle BCA \\ &= \frac{1}{2} ab \sin(90^\circ - (\alpha - \beta)) \dots \dots \dots (2)\end{aligned}$$

Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh

$$\text{Luas } \Delta ABC = \Delta ACD + \Delta CDB$$

$$\frac{1}{2} ab \sin(90^\circ - (\alpha - \beta)) = \left(\frac{1}{2} a b \cos \alpha \cos \beta\right) + \left(\frac{1}{2} a b \sin \alpha \sin \beta\right) \leftrightarrow \text{coret } \frac{1}{2} ab$$

$$\sin(90^\circ - (\alpha - \beta)) = \dots \dots \dots + \dots \dots \dots$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \dots \dots \dots + \dots \dots \dots$$



Coba Periksa !

Dari penemuan rumus $\cos(\alpha - \beta)$ di atas, dapat kita verifikasi menggunakan sudut istimewa untuk mengetahui apakah rumus yang kita peroleh tersebut benar atau tidak. Kita tahu nilai dari $\cos 30^\circ$ adalah $\frac{1}{2}\sqrt{3}$. Gunakan rumus $\cos(\alpha - \beta)$ di atas untuk mencari nilai sudut istimewa 30° . Jika $30^\circ = 90^\circ - 60^\circ$. Lakukan perhitungan di bawah ini.

$$\cos(90^\circ - 60^\circ) = \dots \dots \dots$$

(Apakah nilainya sama dengan sudut istimewa $\cos 30^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$?)



Simpulan

Jadi, dapat disimpulkan rumus $\cos(\alpha - \beta)$ adalah

$$\cos(\alpha - \beta) = \dots \dots \dots + \dots \dots \dots$$

2. Menentukan rumus jumlah dua sudut kosinus.



Ayo Pikirkan !

Satu rumus sudah kalian temukan sendiri yaitu $\cos(\alpha - \beta)$. Selanjutnya, kamu harus pikirkan bagaimana kalau menghitung nilai dari $\cos 75^\circ$. Apabila nilai 75° dikolaborasikan dengan nilai sudut istimewa diperoleh seperti ini $75^\circ = 45^\circ + 30^\circ$. Artinya kalian harus menemukan rumus jumlah dua sudut dari kosinus yaitu $\cos(\alpha + \beta)$.



Ayo Ingat !

Salah satu cara untuk mendapatkan rumus umum dari $\cos(\alpha + \beta)$. Kalian harus ingat terlebih dahulu materi sudut negatif yaitu $\cos -\beta = \cos \beta$ dan $\sin -\beta = -\sin \beta$



Ayo Selesaikan !

Bentuk $\cos(\alpha + \beta)$ dapat diubah menjadi $\cos(\alpha - (-\beta))$

Dapat dijabarkan menggunakan rumus $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$

Perhatikan, $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha - (-\dots))$

=

=



Simpulan

Jadi dapat, disimpulkan rumus $\cos(\alpha + \beta)$ adalah

$$\cos(\alpha + \beta) = \dots + \dots$$

Sehingga soal pada **permasalahan 1** dapat diselesaikan sebagai berikut :

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

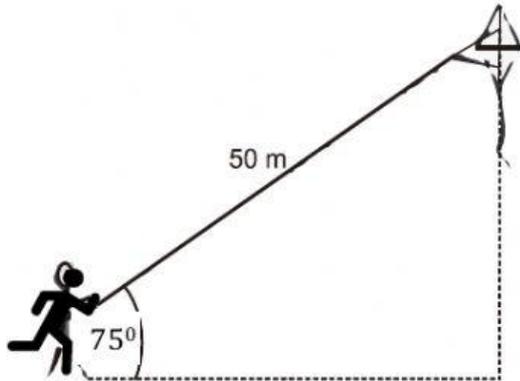
.....

.....



Ayo Belajar Pemecahan Masalah !

Permasalahan 2



Pada gambar disamping, seorang anak bermain layang-layang dengan panjang benang yang digunakan 50 meter dan membentuk sudut 75° dengan tanah. Berapakah tinggi layangan tersebut?



Ayo Kumpulkan Informasi !

Kendala yang diperoleh pastinya kalian kesulitan dalam menghitung nilai dari $\sin 75^\circ$. Biasanya kalian menghitung nilai trigonometri tanpa kalkulator untuk sudut-sudut istimewa misalnya 0° , 30° , 45° , 60° , 90° . Untuk mencari nilai dari $\sin 75^\circ$ tetap menggunakan sudut-sudut istimewa.

$\sin 75^\circ = \sin(\dots + \dots)$ (Ubah 75° dalam penjumlahan sudut istimewa)
 Jika $\alpha = 30^\circ$ dan $\beta = 45^\circ$
 Jadi, berapa nilai $\sin(\alpha + \beta)$?

3. Menentukan rumus jumlah dua sudut sinus.



Ayo Selesaikan !

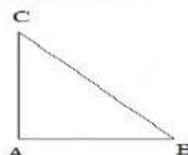
Bagian berikutnya akan diberikan sebuah cara untuk mendapatkan rumus umum dari $\sin(\alpha + \beta)$. Kalian harus ingat terlebih dahulu materi perbandingan trigonometri dan luas segitiga.

Ingat !

Perbandingan Trigonometri :

$$\sin B = \frac{AC}{BC}$$

$$\cos B = \frac{AB}{BC}$$

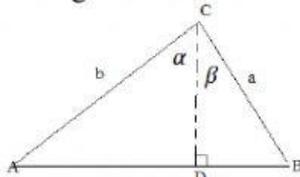


Luas Segitiga :

$$L = \frac{1}{2} \times AB \times AC$$

Tugas kalian sekarang adalah mengisi titik-titik pada isian di bawah ini dengan benar. Apabila kalian mengalami kesusahan bisa diskusi dengan teman atau guru.

Amati gambar berikut !



Perhatikan $\triangle BDC$,

$$\cos \beta = \frac{\text{CD}}{\text{BC}} \text{ sehingga } \text{CD} = \dots \dots$$

$$\sin \beta = \frac{\text{BD}}{\text{BC}} \text{ sehingga } \text{BD} = \dots \dots$$

Luas segitiga $\triangle BDC$

$$L \triangle BDC = \frac{1}{2} \times \text{BD} \times \text{CD}$$

$$L \triangle BDC = \frac{1}{2} \times \dots \times \dots$$

$$L \triangle BDC = \dots \dots \dots$$

Perhatikan $\triangle ADC$,

$$\cos \alpha = \frac{\text{CD}}{\text{AC}} \text{ sehingga } \text{CD} = \dots \dots$$

$$\sin \alpha = \frac{\text{AD}}{\text{AC}} \text{ sehingga } \text{AD} = \dots \dots$$

Luas segitiga $\triangle ADC$

$$L \triangle ADC = \frac{1}{2} \times \text{AD} \times \text{CD}$$

$$L \triangle ADC = \frac{1}{2} \times \dots \times \dots$$

$$L \triangle ADC = \dots \dots \dots$$

$$\text{Jadi } L \triangle ADC + L \triangle BDC = \dots \dots \dots + \dots \dots \dots$$

$$L \triangle ADC + L \triangle BDC = \dots \dots \dots (\dots \dots + \dots \dots) \quad \dots (1)$$

Rumus umum luas segitiga

$$L \triangle ABC = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} ab \sin(\dots + \dots) \quad \dots (2)$$

Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh :

$$L \triangle ABC = L \triangle ADC + L \triangle BDC$$

$$\frac{1}{2} \dots \dots \dots (\dots \dots + \dots \dots) = \dots \dots \dots (\dots \dots + \dots \dots)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \dots \dots \dots + \dots \dots \dots$$



Coba Periksa !

Dari penemuan rumus $\sin(\alpha + \beta)$ di atas, dapat kita verifikasi menggunakan sudut istimewa untuk mengetahui apakah rumus yang kita peroleh tersebut benar atau tidak. Bahwa kita tahu nilai dari $\sin 60^\circ$ adalah $\frac{1}{2}\sqrt{3}$. Rumus $\sin(\alpha + \beta)$ di atas untuk mencari nilai sudut istimewa 60° . Jika $60^\circ = 30^\circ + 30^\circ$. Lakukan perhitungan di bawah ini.

$$\sin(30^\circ + 30^\circ) = \dots \dots \dots$$

(Apakah nilainya sama dengan sudut istimewa $\sin 60^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$?)



Simpulan

Jadi, dapat disimpulkan rumus $\sin(\alpha + \beta)$ adalah

$$\sin(\alpha + \beta) = \dots \dots \dots + \dots \dots \dots$$

4. Menentukan rumus selisih dua sudut sinus.



Ayo Pikirkan !

Satu rumus sudah kalian temukan sendiri yaitu $\sin(\alpha + \beta)$. Hal yang harus dipikirkan selanjutnya yaitu bagaimana kalau menghitung nilai dari $\sin 15^\circ$. Nilai 15° dikolaborasikan dengan nilai sudut istimewa diperoleh $15^\circ = 45^\circ - 30^\circ$. Artinya kalian harus menemukan pula rumus selisih dua sudut dari sinus yaitu $\sin(\alpha - \beta)$. $\sin(\alpha - \beta)$ dapat diubah menjadi $\sin(\alpha + (-\beta))$.



Ayo Ingat !

Salah satu cara untuk mendapatkan rumus umum dari $\sin(\alpha - \beta)$. Kalian harus ingat terlebih dahulu materi sudut negatif yaitu $\cos -\beta = \cos \beta$ dan $\sin -\beta = -\sin \beta$



Ayo Selesaikan !

Dapat dijabarkan menggunakan rumus $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$.

Perhatikan,

$$\begin{aligned}\sin(\alpha - \beta) &= \sin(\alpha + (-\dots)) \\ &= \dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots\end{aligned}$$



Simpulan

Jadi, dapat disimpulkan rumus $\sin(\alpha - \beta)$ adalah

$$\sin(\alpha - \beta) = \dots\dots\dots + \dots\dots\dots$$

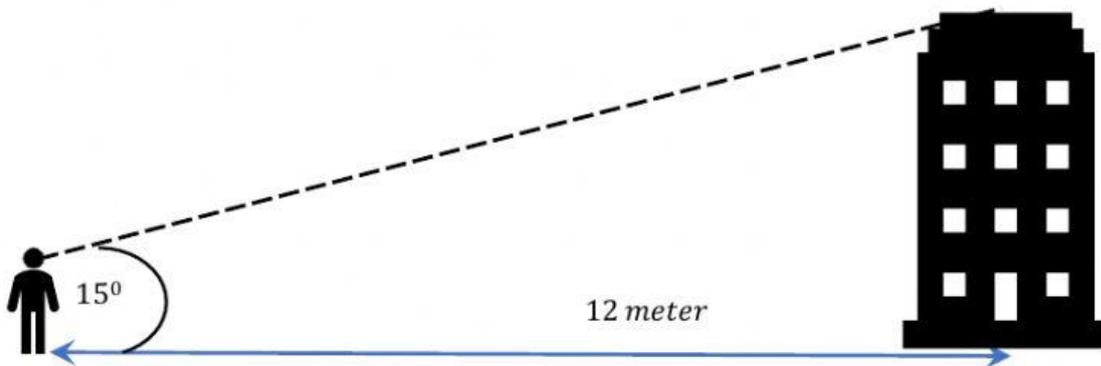
Sehingga soal pada **permasalahan 2** dapat diselesaikan sebagai berikut :

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....



Ayo Belajar Pemecahan Masalah !

Permasalahan 3



Seseorang melihat sebuah bangunan dari jarak 12 meter dan membentuk sudut elevasi 15° dengan tanah. Berapakah tinggi gedung tersebut?



Ayo Kumpulkan Informasi !

Kendala yang diperoleh pastinya kalian kesulitan dalam menghitung nilai dari $\tan 15^\circ$. Biasanya kalian menghitung nilai trigonometri tanpa kalkulator untuk sudut-sudut istimewa misalnya 0° , 30° , 45° , 60° , 90° . Untuk mencari nilai dari $\tan 15^\circ$ tetap menggunakan sudut-sudut istimewa.

$\sin 15^\circ = \sin(\dots - \dots)$ (Ubah 15° dalam penjumlahan sudut istimewa)
 Jika $\alpha = 45^\circ$ dan $\beta = 30^\circ$
 Jadi, berapa nilai $\tan(\alpha - \beta)$?

5. Menentukan rumus jumlah dua sudut tangen.



Ayo Pikirkan !

Bagaimana kalau rumus jumlah dan selisih dua sudut untuk tangen ? Bagaimana cara menemukan rumus $\tan(\alpha + \beta)$ dan $\tan(\alpha - \beta)$?



Ayo Nyatakan !

Rumus-rumus penjumlahan dan pengurangan pada sinus dan kosinus yang telah dibahas dapat digunakan untuk menemukan rumus penjumlahan tangen sebagai berikut :

Karena $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, maka $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)}$



Ayo Selesaikan !

Akibatnya,

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}$$

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}{\frac{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} \quad \text{sama-sama dibagi dengan } \cos \alpha \cos \beta$$

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\dots + \dots}{\dots - \dots}$$

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\dots + \dots}{1 - \dots}$$

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\dots + \dots}{1 - \dots}$$



Coba Periksa !

Dari penemuan rumus $\tan(\alpha + \beta)$ di atas, dapat kita verifikasi menggunakan sudut istimewa dari $\tan 60^\circ$ adalah $\sqrt{3}$. Gunakan rumus $\tan(\alpha + \beta)$ di atas untuk mencari nilai sudut istimewa 60° .

$$\tan(30^\circ + 30^\circ) = \dots$$

(Apakah nilainya sama dengan sudut istimewa $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$?)



Simpulan

Jadi, dapat disimpulkan rumus $\tan(\alpha + \beta)$ adalah

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\dots + \dots}{\dots - \dots}$$