LKPD 3

INDUKSI MATEMATIKA

Nama :
Kelas :

1. Buktikan bahwa untuk setiap bilangan asli n berlaku $\sum_{i=1}^{n}(2i-1)=n^2$!

   Pembuktian:

   - Langkah awal (I)

     Untuk n = 1 $\Rightarrow (2(\ldots)-1)=(\ldots.)^2$

     $(\ldots..-\ldots.)=.\ldots$

     $.\ldots=.\ldots$

   - Langkah induksi

     Langkah II:

     n = k $\Rightarrow \sum_{i=1}^{n}(2(\ldots)-1)=(\ldots.)^2$

     $\sum_{i=1}^{n} 2\ldots-1=\ldots.^2$

   - Langkah induksi

     Langkah III:

     $$n=k+1\Rightarrow \sum_{i=1}^{n}(2k-1)+\big((2(\ldots\ldots..)-1)\big)=(\ldots\ldots..)^2$$

     $$\ldots.^2+(.\ldots..+\ldots.-\ldots.)=(\ldots\ldots^2+.\ldots+\ldots.)$$

     $$\ldots\ldots^2+.\ldots+\ldots.=\ldots\ldots^2+.\ldots+\ldots$$

2. Diketahui barisan bilangan dibentuk mengikuti aturan $U_{n+1}=3U_n-2U_{n-1}$ dengan $U_1=2$ dan $U_2=3$.

   Tentukan:

   a. $U_3, U_4, dan\ U_5$

   b. Tentukan dugaan rumus suku ke-n

   c. Buktikan rumus suku ke-n yang diperoleh pada soal (b) dengan menggunakan induksi matematika!

   Penyelesaian:

   a. Diketahui $U_{n+1}=3U_n-2U_{n-1}$ dengan $U_1=2$ dan $U_2=3$.
      - Untuk $n=2$, diperoleh $U_3=3U_2-2U_1=3(\ldots.)-2(\ldots.)=.\ldots..$
      - Untuk $n=3$, diperoleh $U_4=3U_3-2U_2=3(\ldots.)-2(\ldots.)=.\ldots..$
      - Untuk $n=4$, diperoleh $U_5=3U_4-2U_3=3(\ldots.)-2(\ldots.)=.\ldots..$

   b. Berdasarkan hasil pada (a), dapat diduga bahwa $U_n=2^{n-1}+1$. Dugaan ini mungkin saja salah. Oleh karena itu, kita akan mengujinya pada soal (c).

   c. Kita akan membuktikan $U_n=2^{n-1}+1$ dengan menggunakan induksi matematika.

      (i) Untuk $n=1\Rightarrow U_1=2^{\cdots^{-1}}+1=\ldots.+\ldots.=\ldots.$

      (ii) Anggap rumus tersebut berlaku untuk $n=1,2,3,\ldots,k$ sehingga diperoleh:

      $U_1=2^{1-1}+1,\quad U_2=2^{2-1}+1,\ldots\ldots\ldots\ldots.., U_{k-1}=2^{k-2}+1,\quad U_k=2^{k-1}+1$

      Selanjutnya, kita akan membuktikan bahwa rumus tersebut berlaku untuk $n=k+1$ atau kita harus membuktikan bahwa:

      $$U_{k+1}=2^k+1$$

      Untuk itu, dengan menggunakan rumus $U_{n+1}=3U_n-2U_{n-1}$ untuk $n+1=k+1$ maka :

      $$\begin{aligned}U_{k+1}&=3U_k-2U_{k-1}\\&=3(\ldots.^{\cdots^{-\cdots}}+\ldots.)-2(\ldots.^{\cdots^{-\cdots}}+1)\\&=3.\ldots.^{\cdots^{-\cdots}}+\ldots.-2.\ldots.^{\cdots^{-\cdots}}-\ldots.\\&=3.\ldots.^{\cdots^{-\cdots}}-2.\ldots.^{\cdots^{-\cdots}}+\ldots.\\&=2^{\cdots^{-\cdots}}(\ldots.\ .\ \ldots-\ldots.)+\ldots.\\&=2^{\cdots^{-\cdots}}\ldots^2+\ldots.\\&=2^{\cdots}+\ldots.\end{aligned}$$

      Berdasarkan (i) dan (ii), maka terbukti $U_n=2^{\cdots^{-\cdots}}+\ldots.$

Asih Restari, S.Pd

LIVEWORKSHEETS