Lembar Kegiatan Peserta Didik 2
(LKPD-2)

Sifat-sifat Limit Fungsi
(Bagian 1)

Nama :

Kelas :

Setelah mengikuti pembelajaran ini, kamu diharapkan dapat menentukan eksistensi limit fungsi aljabar di suatu titik menggunakan sifat limit fungsi, menentukan keberadaan limit fungsi dari grafik fungsi yang diberikan menggunakan sifat limit fungsi, dan menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan limit fungsi aljabar menggunakan sifat limit fungsi

Petunjuk :

1. Baca dan pahamilah LKPD-2 dengan teliti, kemudian diskusikan dengan temanmu.
2. Isi dan jawablah pertanyaan pada LKPD-2 ini dengan tepat.
3. Jika ada yang kurang jelas, bertanyalah kepada guru.
4. Waktu yang disediakan untuk mengerjakan LKPD-2 ini adalah 50 menit.

LIVEWORKSHEETS

Stimulation

Ayo Mengamati

Sebelum memulai pembelajaran, tontonlah video berikut!

Setelah kamu menonton video di atas, apa yang kamu dapatkan tentang manfaat limit dalam kehidupan? Agar lebih jelas lagi tentang limit, ayo kerjakan *E*-LKPD berikut ini!

Problem Statement

Masalah 1:
Jika diketahui debit air $(Q(t))$ yang mengalir melewati selang mengikuti fungsi berikut :

$$Q(t) = \begin{cases} 2t, & jika\ 0 < t \leq 1 \\ 2, & jika\ 1 < t \leq 2 \\ 2t(t-1), & jika\ 2 < t \leq 3 \end{cases}$$

Maka berapa meter kubikkah air yang mengalir melalui selang tersebut pada saat waktu (t) 1 sekon dan 2 sekon?.

Untuk menjawab pertanyaan ini, kamu harus mengikuti pembelajaran berikut ya^^

LIVEWORKSHEETS

Ayo Berdiskusi

Berdasarkan video dan informasi pada tahap stimulus yang telah diberikan, tulislah apa yang diketahui dan ditanya beserta jawaban sementaramu.

1. Diketahui

Tulislah jawaban kamu di kertas kemudian *Scan* dan *Upload* jawaban kamu di sini

2. Ditanya

Tulislah jawaban kamu di kertas kemudian *Scan* dan *Upload* jawaban kamu di sini

3. Perkiraan jawabanmu beserta alasannya

Data collecting

KEGIATAN : MENEMUKAN SIFAT LIMIT

Untuk menyelesaikan masalah 1 kita membutuhkan sifat-sifat limit. Untuk menemukan sifat-sifat limit, perhatikanlah penjelasan berikut ini!^^

Pada pertemuan sebelumnya, kita telah mempelajari konsep limit fungsi beserta cara penulisannya. Namun, bagaimana dengan nilai limit untuk bermacam-macam jenis fungsi? Simaklah penjelasan berikut! ^^

Untuk memperoleh sifat-sifat limit fungsi, ikutilah uraian yang tersaji berikut dengan mengisi bagian yang kosong!

1. **Sifat 1**

   Pada sifat ini kita akan membahas limit jika fungsi $f(x) = k$, untuk k bilangan real.

   Kita mulai dari contoh ya,

LIVEWORKSHEETS

Kita ambil $k = 4$ maka untuk menentukan nilai pendekatan $f(x)$ pada saat x mendekati -1, kita dapat menggunakan konsep limit fungsi sebelumnya (x mendekati -1 dari kanan dan x mendekati -1 dari kiri) yaitu sebagai berikut:

x	$-1{,}2$	$-1{,}1$	$-1{,}01$	...	-1	...	$-0{,}99$	$-0{,}9$	$-0{,}8$
$f(x) = 4$	4	4	...	...	...	...	...	4	4

Terlihat bahwa:

$\lim\limits_{x \to -1} 4 = \boxed{}$

Secara intuitif, untuk sebarang nilai x dekat dengan bilangan, $f(x)$ mendekati nilai konstannya. Hal ini dapat ditulis dengan

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} k = k, \text{ dengan } k \text{ dan } c \text{ bilangan real.}$$

2. **Sifat 2**

Pada sifat ini kita akan membahas limit jika fungsi $f(x) = x$

Kita mulai dari contoh ya, misal $f(x) = x$ maka untuk menentukan nilai pendekatan $f(x)$ pada saat x mendekati 3, kita dapat menggunakan konsep limit fungsi sebelumnya (x mendekati 3 dari kanan dan x mendekati 3 dari kiri) yaitu sebagai berikut:

x	2,8	2,9	2,99	...	3	...	3,01	3,1	3,2
$f(x)$	2,8	2,9	...	...	...	...	...	...	...

Terlihat bahwa:

$\lim\limits_{x \to 3} x = \boxed{}$

Secara induktif, untuk setiap nilai x mendekati bilangan c, maka nilai $f(x)$ mendekati $f(c) = c$, hal ini dapat ditulis dengan

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} x = c, \text{ dengan } c \text{ bilangan real}$$

3. **Sifat 3**

Pada sifat ini kita akan membahas limit jika fungsi $f(x) = kx$, untuk k bilangan real

Kita mulai dari contoh ya

Diketahui $\lim\limits_{x \to 2} x = 2$ dan fungsi $f(x) = 3x$

Beikut perhitungan numerik $f(x)$ untuk nilai x disekitar 2

x	1,8	1,9	1,99	1,999	2	2,001	2,01	2,1	2,2
$f(x) = x$	1,8	1,9	...	...	...	...	...	...	...
$f(x) = 3x$	5,4	5,7	...	...	...	...	...	...	...

LIVEWORKSHEETS

Dari tabel di atas terlihat bahwa nilai limit $3.f(x) = 3x$ adalah tiga kali lipat dari limit $f(x)=x$

$$\lim_{x\to 2} 3.f(x) = 3.\lim_{x\to 2} f(x)$$

$$= 3.\lim_{x\to 2} x$$

$$= \boxed{}$$

Sehingga, secara induktif dapat dituliskan dengan:

$$\boldsymbol{\lim_{x\to a} k.f(x) = k.\lim_{x\to a} f(x), \qquad k \in \mathbb{R}}$$

4. **Sifat 4**

Pada sifat ini kita akan membahas limit jika terdapat penjumlahan atan pengurangan dua fungsi, kita mulai dari contoh ya,

Kita ambil $f(x) = x^2$, dan $g(x) = 2x$ maka untuk menentukan nilai pendekatan $(f(x) + g(x))$ dan $(f(x) - g(x))$ pada saat x mendekati 1 menggunakan konsep limit adalah sebagai berikut:

x	0,8	0,9	0,99	...	1	...	1,01	1,1	1,2
$f(x) = x^2$	0,64	...	...	...	...	...	...	...	...
$g(x) = 2x$	1,6	...	...	...	...	...	...	...	...
$f(x) + g(x) = x^2 + 2x$	2,24	...	...	...	...	...	...	...	...
$f(x) - g(x) = x^2 - 2x$	0,96	...	...	...	...	...	...	...	...

Terlihat bahwa :

$$\lim_{x\to 1}(f(x) + g(x)) = \lim_{x\to 1}(x^2 + 2x) = \cdots.$$

$$\lim_{x\to 1}\big(f(x) - g(x)\big) = \lim_{x\to 1}(x^2 - 2x) = \cdots.$$

Sehingga dari fakta tersebut, ditulis :

$$\lim_{x\to 1}\big(f(x) + g(x)\big) = \lim_{x\to 1}(x^2 + 2x)$$

$$= \lim_{x\to 1} x^2 + \lim_{x\to 1} 2x$$

$$= \lim_{x\to 1} f(x) + \lim_{x\to 1} g(x)$$

dan

$$\lim_{x\to 1}(f(x) - g(x)) = \lim_{x\to 1}(x^2 - 2x)$$

$$= \lim_{x\to 1} x^2 - \lim_{x\to 1} 2x$$

$$= \lim_{x\to 1} f(x) - \lim_{x\to 1} g(x)$$

Secara induktif dapat dituliskan dengan:

$$\boldsymbol{\lim_{x\to c}\big(f(x) + g(x)\big) = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x)}$$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to c}\big(f(x) - g(x)\big) = \lim_{x\to c} f(x) - \lim_{x\to c} g(x)}$$

LIVEWORKSHEETS

Contoh :

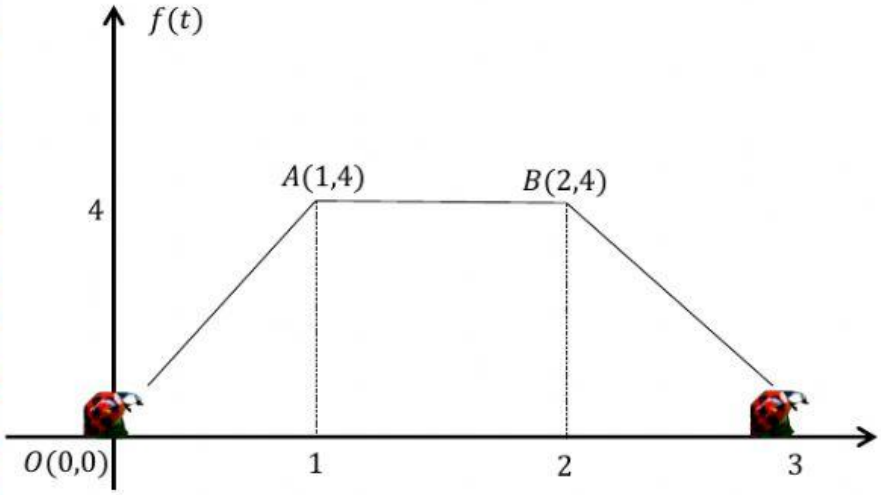
Seekor kumbang diamati sedang hinggap di bunga pada sebuah perkebunan. Pada keadaan tinggi ($f(t)$) dan interval waktu (t) tertentu, misalkan kumbang tersebut terbang mengikuti fungsi berikut :

$$f(t) = \begin{cases} -4t^2 + 8t, & jika\ 0 < t \leq 1 \\ 4, & jika\ 1 < t \leq 2 \\ -4(t-3), & jika\ 2 < t \leq 3 \end{cases}$$

Maka berapakah ketinggian kumbang tersebut pada saat t mendekati 1 sekon dan 2 sekon?

Penyelesaian :

Perhatikan gambar dari ilustrasi di atas



Gambar 1.2 Ilustrasi gerakan kumbang

Misalkan $y = f(t) = \begin{cases} -4t^2 + 8t, & jika\ 0 < t \leq 1 \\ 4, & jika\ 1 < t \leq 2 \\ -4(t-3), & jika\ 2 < t \leq 3 \end{cases}$ sehingga nilai limit fungsi pada saat mendekati $t = 1$ dan $t = 2$ dilihat pada tabel berikut.

Tabel 1.1 Nilai $y = f(t)$ pada saat t mendekati 1.

t mendekati 1 dari kiri					↓	t mendekati 1 dari kanan				
t	0,8	0,9	0,99	...	1	t	...	1,01	1,1	1,2
$f(t) = -4t^2 + 8t$		...	...	...	...	$f(t) = 4$	...	...	...	4
$f(t)$ mendekati …					↑	$f(t)$ mendekati …				

Tabel 1.2 Nilai $y = f(t)$ pada saat t mendekati 2.

t mendekati 2 dari kiri					↓	t mendekati 2 dari kanan				
t	1,8	1,9	1,99	...	2	t	...	2,01	2,1	2,2

LIVEWORKSHEETS

$f(t) = 4$	4	⋯	⋯	⋯	⋯	$f(t) = -4(t-3)$	⋯	⋯	⋯	
$f(t)$ mendekati …					↑	$f(t)$ mendekati …				

Dari pengamatan pada tabel, dapat dilihat bahwa y mendekati 4 pada saat t mendekati 1 dan y mendekati 4 pada saat t mendekati 2. Dengan perhitungan limit fungsi diperoleh :

I. Untuk t mendekati 1

$\lim\limits_{t \to 1^-} -4t^2 + 8t = \cdots.$

$\lim\limits_{t \to 1^+} 4 = \cdots.$

Diperoleh, $\lim\limits_{t \to 1^-} -4t^2 + 8t = \cdots = \lim\limits_{t \to 1^+} 4.$

Dengan demikian, fungsi **lintasan kumbang mempunyai limit** sebesar **4** pada saat $\boldsymbol{t}$ **mendekati 1**.

II. Untuk t mendekati 2

$\lim\limits_{t \to 2^-} 4 = \cdots.$

$\lim\limits_{t \to 2^+} -4(t-3) = \cdots.$

Diperoleh, $\lim\limits_{t \to 2^-} 4 = \cdots = \lim\limits_{t \to 2^+} -4(t-3).$

Dengan demikian, fungsi **lintasan kumbang mempunyai limit** sebesar **4** pada saat $\boldsymbol{t}$ **mendekati 2**.

Agar ananda lebih memahami sifat-sifat limit fungsi, ayo tonton video berikut!

LIVEWORKSHEETS

Data processing

Ayo Kita Menalar

Berdasarkan sifat limit yang telah kamu dapatkan pada kegiatan menemukan sifat-sifat limit fungsi, kita akan menyelesaikan masalah 1 yang ada pada tahap stimulus.

Penyelesaian Masalah

Buatlah penyelesaian yang sistematis dan lengkap untuk mencari berapa meter kubik air yang mengalir melalui selang tersebut pada saat waktu (t) 1 sekon dan 2 sekon!

Tulislah jawaban kamu di kertas kemudian *Scan* dan *Upload* jawaban kamu di sini

Verification

Dengan menggunakan konsep limit fungsi yang kamu dapatkan, jawabanmu untuk masalah pada tahap stimulus tentang kecepatan apel sesaat sebelum menyentuh kepala adalah:

Apakah jawabanmu sama dengan perkiraan jawabanmu?

Generalization

Mari Menyimpulkan

Buatlah kesimpulan pelajaran hari ini, diharapkan kamu dapat menyatakan ulang konsep yang sudah dipelajari dengan bahasamu sendiri dan jangan lupa mengirimnya (LKPD ini) ya^^

Tulislah jawaban kamu di kertas kemudian *Scan* dan *Upload* jawaban kamu di sini

LIVEWORKSHEETS

Ayo Berlatih

Bacalah soal berikut dengan cermat dan tuliskan jawabanmu pada tempat yang telah disediakan^^

1. Sebuah lempengan logam yang dipanaskan akan memuai dengan pertambahan luas sebagai fungsi waktu $f(t) = 0{,}36t^2 + 0{,}6t\ (cm^2)$. Berapakah pertambahan luas lempeng tersebut pada saat $t = 2$ sekon?

Tulislah jawaban kamu di kertas kemudian *Scan* dan *Upload* jawaban kamu di sini

Menggunakan, Memanfaatkan, dan Memilih Prosedur atau Operasi Tertentu

2. Angka pertumbuhan penduduk $p(t)$ setiap tahun dirumuskan dengan

$$p(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t(3t-4), & jika\ 3 < t \leq 4 \\ 16, & jika\ 4 < t \leq 5 \end{cases}$$ dalam persen (%).

Pertumbuhan penduduk saat mendekati tahun keempat ($t = 4$) adalah ... .

Tulislah jawaban kamu di kertas kemudian *Scan* dan *Upload* jawaban kamu di sini

Menggunakan, Memanfaatkan, dan Memilih Prosedur atau Operasi Tertentu

3. Tunjukkan dengan gambar dan pendekatan nilai fungsi pada saat pendekatan ke 2 dari kiri dan kanan:
   a. $\lim\limits_{x \to 2} x = 2$
   b. $\lim\limits_{x \to 2} 6x = 12$
   c. $\lim\limits_{x \to 2} (6 + x) = 12$

Tulislah jawaban kamu di kertas kemudian *Scan* dan *Upload* jawaban kamu di sini

Menggunakan, Memanfaatkan, dan Memilih Prosedur atau Operasi Tertentu

4. Jika L, K adalah bilangan real dan $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L, \lim\limits_{x \to c} g(x) = K$ maka tentukan :
   a. $\lim\limits_{x \to c} 6g(x)$
   b. $\lim\limits_{x \to c} \frac{1}{2} f(x)$
   c. $\lim\limits_{x \to c} [f(x) + g(x)]$
   d. $\lim\limits_{x \to c} 5[f(x) + g(x)]$

Tulislah jawaban kamu di kertas kemudian *Scan* dan *Upload* jawaban kamu di sini

Menyatakan Ulang Sebuah Konsep

LIVEWORKSHEETS