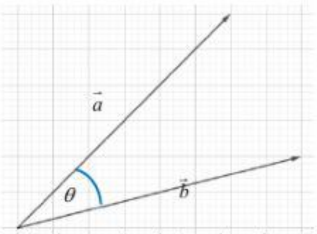
MATERI PEMBELAJARAN TATAP MUKA

SMA N 1 TEMPEL

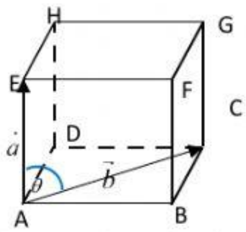
Mapel : **Matematika Peminatan**
Guru Mapel : **Brigita Wahyu M., S.Pd.**
Materi : **Sudut antara 2 Vektor**

Nama Siswa : ....
No : ....
Kelas : ....

Sudut yang dibentuk oleh dua vektor, secara grafis dapat diperlihatkan seperti pada Gambar 1. Dan Gambar 2 berikut ini:



Gambar 1. Ilustrasi sudut pada vektor 2 dimensi



Gambar 2. Ilustrasi sudut pada vektor 3 dimensi

Pada materi sebelumnya, Kalian sudah mengenal mengenai perkalian skalar dua vektor atau sering disebut *dot* product. Coba baca kembali rumus perkalian skalar dua vektor!

Salah satu rumus perkalian skalar dua vektor adalah $\vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\cos\theta$. Berdasarkan rumus tersebut, kita dapat menentukan sudut yang dibentuk oleh dua vektor dengan cara sebagai berikut:

$$|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = \vec{a} \bullet \vec{b}$$

$$\cos\theta = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

Sehingga dapat diperoleh : $\theta = Arc\cos\dfrac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

Contoh 1:

Sebuah kapal *boad* meluncur dari pangkalan Angkatan laut. Kapal pertama menuju ke arah koordinat $\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$ dan kapal ke-dua menuju ke arah $\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$ saat dilihat pada radar. Tentukan sudut yang dibentuk oleh lintasan kedua kapal tersebut.

Jawab:

Misalkan : $\vec{a} = \begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$ dan $\vec{b} = \begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$.

$$\cos\theta = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

$$= \frac{4.3 + 1.5}{\sqrt{4^2+1^2}.\sqrt{3^2+5^2}}$$

$$= \frac{12+5}{\sqrt{17}.\sqrt{34}}$$

$$= \frac{17}{\sqrt{17}\sqrt{17}\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\cancel{17}}{\cancel{17}\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ingat!

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\theta = ArcCos\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$$

$$= 45^\circ$$

$\therefore$ Lintasan kedua kapal membentuk sudut 45°.

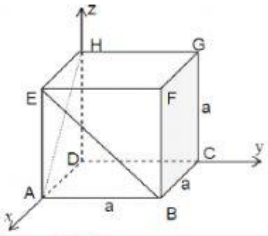
LIVEWORKSHEETS

Contoh 2:

Pada kubus ABCD.EFGH, tentukan sudut antara garis $\overrightarrow{BE}$ and $\overrightarrow{AH}$.

Jawab:

Secara vektor kubus itu dapat digambarkan pada sistem koordinat ruang seperti berikut. Jika rusuk kubus itu a satuan maka koordinat titik-titik A(a,0,0), B(a,a,0), E(a,o,a), G(0,a,a), H(0,0,a). Sehingga:



$$\overrightarrow{BE} = \underline{e} - \underline{b} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -a \\ a \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{AH} = \underline{h} - \underline{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$$

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{BE} \bullet \overrightarrow{AH}}{\left|\overrightarrow{BE}\right|\left|\overrightarrow{AH}\right|}$$

$$= \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ -a \\ a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ a \end{pmatrix}}{\sqrt{0^2 + (-a)^2 + a^2}\sqrt{(-a)^2 + 0^2 + a^2}}$$

$$= \frac{0 + 0 + a^2}{\sqrt{2a^2}.\sqrt{2a^2}} \quad = \frac{a^2}{2a^2} = \frac{1}{2}$$

$$\theta \quad = ArcCos\,\frac{1}{2} = 60^\circ$$

Contoh 3:

Dua buah pesawat tanpa awak diluncurkan dari stasiun antariksa. Pesawat pertama bergerak menuju koordinat titik (2, −1, 3), sedangkan pesawat ke-dua bergerak menuju koordinat titik (1, 3, −2). Apabila stasiun antariksa merupakan koordinat O(0,0,0), maka tentukan nilai Sinus sudut yang dibentuk oleh lintasan kedua pesawat tersebut!

Jawab :

Misalkan : $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ dan $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, maka

$$\cos\theta = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|}$$

$$= \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2}.\sqrt{1^2 + 3^2 + (-2)^2}}$$

$$= \frac{2.1 + (-1).3 + 3.(-2)}{\sqrt{14}\sqrt{14}}$$

$$\cos\theta = \frac{-7}{14}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

$$\theta = ArcCos\left(-\frac{1}{2}\right) = 120^\circ$$

Ingat!!

Cos negatif di kuadran II.

$$Sin\ 120^\circ = Sin\ \left(180^\circ - 60^\circ\right)$$

$$= Sin\ \ 60^\circ$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

Ingat!!

Gunakan relasi sudut 180°, karena 120° berada di kuadran II.

Sin a = Sin (180° - α)

= Sin α

Untuk lebih jelas bisa menyimak video berikut ini!

LIVEWORKSHEETS

Kerjakan soal-soal **Latihan 2** berikut ini !

Latihan 2

1. Jika diketahui vektor $\vec{v} = 8\vec{i} + 4\vec{j}$ dan $\vec{w} = \vec{i} - 2\vec{j}$, maka tentukan sudut terkecil yang dibentuk oleh vektor $\vec{v}$ dan vektor $\vec{w}$!.

   Jawab:

   Menentukan nilai Cos θ:

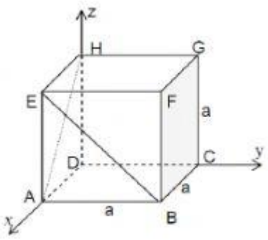
$$\cos\theta = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{\ .\ \ +\ \ .\ (\ \ )}{\sqrt{\ ^2 +\ ^2}.\sqrt{\ ^2 + (\ \ )^2}} = \frac{-}{\sqrt{\ \ +\ \ }.\sqrt{\ \ +\ \ }} = \frac{}{\sqrt{\ \ }.\sqrt{\ \ }} =$$

$$\theta \quad = ArcCos \quad = \quad ^\circ$$

2. Pada kubus ABCD.EFGH yang Panjang rusuknya adalah a, buktikan bahwa sudut antara garis $\overrightarrow{BG}$ and $\overrightarrow{CE}$ tegak lurus. (Baca Kembali syarat dua vektor tegak lurus)

   Jawab :

   Secara vektor kubus itu dapat digambarkan pada sistem koordinat ruang seperti berikut. Jika rusuk kubus itu a satuan maka koordinat titik-titik A(a,0,0), B(a,a,0), C(a, 0, a), D(0,0,0), E(a,o,a), F(a,a,a), G(0,a,a),
   H(0,0,a). Sehingga:



$$\overrightarrow{BG} = \vec{g} - \vec{b} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{CE} = \vec{e} - \vec{c} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$$

   Dua vektor dapat dikatakan tegak lurus bila membentuk sudut ….. ° .

   Bila sudut antara vektor $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ bernilai …..°, maka $\vec{a} \bullet \vec{b} = \dots$

   Akan diperlihatkan bahwa $\overrightarrow{BG} \bullet \overrightarrow{CE} = 0$

   $\overrightarrow{BG} \bullet \overrightarrow{CE} = \dots \times \dots + \dots \times \dots + \dots \times \dots$ = …. ^{2} - …..^{2} = ….

3. Diketahui segitiga ABC dengan A(2, 1, 2), B(6,1,2) dan C(6,5,2). Jika $\vec{u}$ mewakili vektor $\overrightarrow{AB}$ dan $\vec{v}$ mewakili vektor $\overrightarrow{AC}$, maka tentukan nilai Tangen sudut yang dibentuk oleh vektor $\vec{u}$ dan $\vec{v}$. (Baca materi mtk wajib, tentang relasi sudut di berbagai kuadran)

   Jawab:

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \vec{\dots} - \vec{\dots} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{AC} = \vec{\dots} - \vec{\dots} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$$

$$\cos\theta = \frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$

$$= \frac{\begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}}{\sqrt{\dots^2 + \dots^2 + \dots^2}.\sqrt{\dots^2 + \dots^2 + \dots^2}}$$

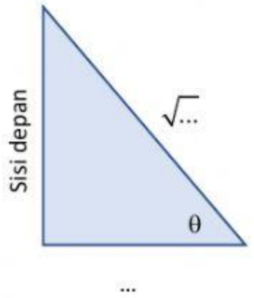
$$= \frac{\dots \times \dots + \dots \times \dots + \dots \times \dots}{\sqrt{\dots}.\sqrt{\dots}}$$

$$= \frac{\dots. + \dots + \dots}{\sqrt{\dots}.\sqrt{\dots}} = \frac{\dots}{\dots\sqrt{\dots}} = \frac{\dots}{\sqrt{\dots}}$$

LIVEWORKSHEETS

Diketahui :

$$\cos\theta = \frac{\text{Sisi samping}}{\text{Sisi miring}} = \frac{\ldots}{\sqrt{\ldots}}$$



Sisi depan = $\sqrt{\left(\sqrt{\ldots}\right)^2 - \ldots^2} = \sqrt{\ldots} = \ldots$

Mencari tan θ:

$$\text{Tan}\,\theta = \frac{\ldots}{\ldots} = \frac{\ldots}{\ldots} = \ldots$$

LIVEWORKSHEETS