Poliedros

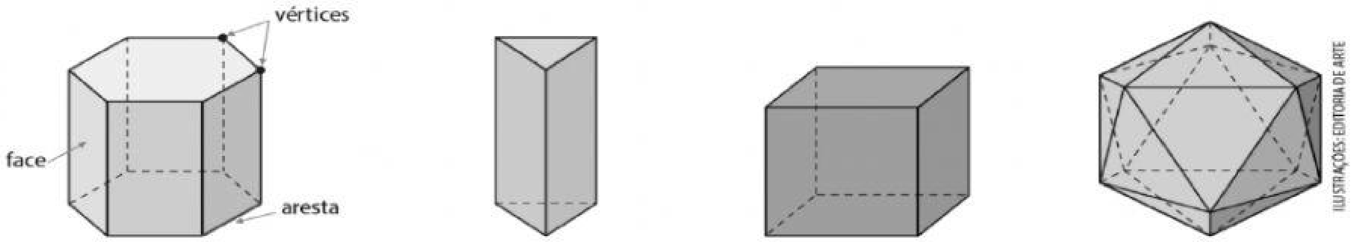
É comum encontrarmos no dia a dia objetos cujos formatos lembram sólidos geométricos. Basta observarmos ao nosso redor, pois eles estão presentes na arquitetura, na engenharia, nas artes plásticas, entre outras áreas do nosso cotidiano. Neste Capítulo, vamos estudar os sólidos geométricos conhecidos como poliedros.

Frequentemente, na arquitetura e engenharia, os projetos e as construções utilizam formatos que lembram poliedros para, por exemplo, obter o melhor aproveitamento da área ou mesmo para criar ambientes mais agradáveis à vista. Observe a seguir o prédio da Biblioteca Nacional de Belarus, país do Leste Europeu. Obra dos arquitetos Viktor Kramarenko e Mikhail Vinogradov, o prédio é conhecido como "diamante bielorrusso" e tem formato de um poliedro.

Os **poliedros** são sólidos formados por um número finito de polígonos e pela região do espaço limitada por eles, em que:

- cada lado de um desses polígonos é comum a dois, e somente dois, polígonos;
- a intersecção de dois desses polígonos é um lado comum ou é um vértice comum ou é vazia.

Observe alguns exemplos de poliedros:



Em um poliedro, destacamos os seguintes elementos:

- **faces**: são os polígonos que formam a superfície do poliedro;
- **arestas**: são os lados comuns a duas faces do poliedro;
- **vértices**: são os vértices das faces do poliedro.

Assim como os polígonos são nomeados pelo seu número de lados, os poliedros são nomeados pelo seu número de faces. Observe a seguir o nome e o respectivo número de faces de alguns poliedros.

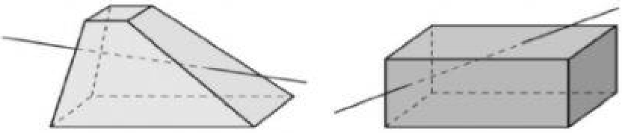
Nome do poliedro	Número de faces
tetraedro	4
pentaedro	5
hexaedro	6
heptaedro	7
octaedro	8
eneaedro	9
decaedro	10
undecaedro	11
dodecaedro	12
icosaedro	20

Poliedros convexos e poliedros não convexos

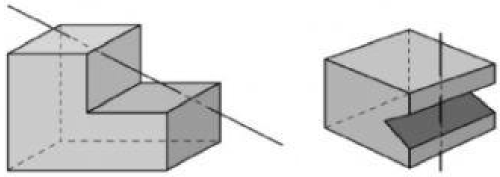
Em um poliedro, se qualquer reta, não paralela a nenhuma das faces, intersecta suas faces em, no máximo, dois pontos, dizemos que ele é **convexo**; caso contrário, é um **não convexo**.

Exemplos:

Poliedros convexos



Poliedros não convexos



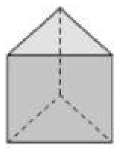
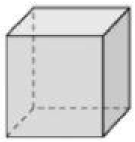
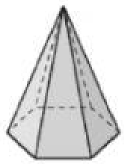
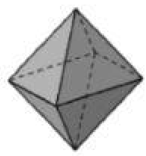
Neste Capítulo, concentraremos nossos estudos nos poliedros convexos.

Relação de Euler

Existe uma relação importante que envolve o número de faces (F), o número de arestas (A) e o número de vértices (V) de um poliedro convexo. Essa relação é válida para todo poliedro convexo e recebe o nome de **relação de Euler**, em homenagem ao matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783).

$$V - A + F = 2$$

Veja alguns exemplos:

Poliedro				
F	5	6	7	8
A	9	12	12	12
V	6	8	7	6
$V - A + F = 2$	$6 - 9 + 5 = 2$	$8 - 12 + 6 = 2$	$7 - 12 + 7 = 2$	$6 - 12 + 8 = 2$

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

A relação de Euler pode ser empregada para determinar o número de um dos elementos (faces, arestas ou vértices) de um poliedro convexo, desde que os outros dois sejam conhecidos. Um poliedro em que é válida a relação de Euler é conhecido como **poliedro euleriano**.

Os poliedros convexos são todos eulerianos. Sendo assim, em todo poliedro convexo vale a relação $V - A + F = 2$.

Observação:

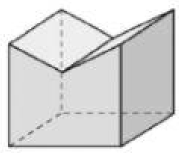
Há poliedros não convexos para os quais vale a relação de Euler. Na figura, temos um exemplo.

$A = 15$

$V = 10$

$F = 7$

$V - A + F = 10 - 15 + 7 = 2$



■ Poliedro não convexo em que a relação de Euler é válida.

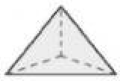
Poliedro regular

Um poliedro convexo é **regular** quando suas faces são polígonos regulares e congruentes entre si e quando em todos os vértices concorre o mesmo número de arestas.

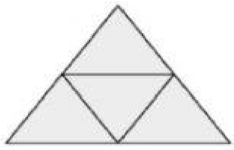
É possível provar que existem somente cinco poliedros regulares: tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro.

Observe a seguir representações dos cinco poliedros regulares e as respectivas planificações de suas superfícies.

- 4 faces triangulares
- 4 vértices
- 6 arestas

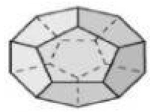


Tetraedro regular.

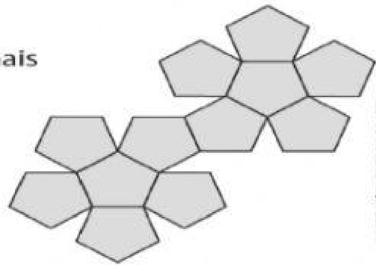


Planificação da superfície.

- 12 faces pentagonais
- 20 vértices
- 30 arestas



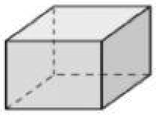
Dodecaedro regular.



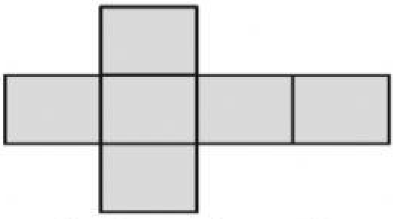
Planificação da superfície.

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

- 6 faces quadrangulares
- 8 vértices
- 12 arestas

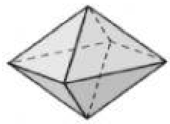


Hexaedro regular.

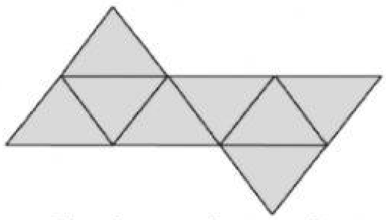


Planificação da superfície.

- 8 faces triangulares
- 6 vértices
- 12 arestas

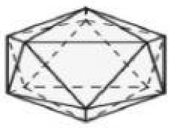


Octaedro regular.

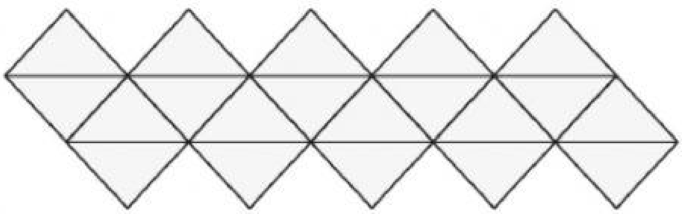


Planificação da superfície.

- 20 faces triangulares
- 12 vértices
- 30 arestas



Icosaedro regular.



Planificação da superfície.

Poliedros de Platão

Os poliedros de Platão levam o nome do filósofo grego Platão (428/427-348/347 a.C.), que os utilizava para explicar alguns fenômenos naturais.

Para que um poliedro seja considerado um **poliedro de Platão**, é necessário que as faces do poliedro tenham o mesmo número de arestas, em todos os vértices concorra o mesmo número de arestas e seja válida a relação de Euler. Assim, os poliedros de Platão englobam todos os poliedros regulares convexos, e existem somente cinco classes de poliedros de Platão: tetraedros, hexaedros, octaedros, dodecaedros e icosaedros.

Nos poliedros de Platão, as faces não precisam ser polígonos regulares; assim, nem todo poliedro de Platão é regular.

> ATIVIDADES RESOLVIDAS

1. Em um poliedro convexo, o número de faces é 11 e o número de vértices é 18. Calcule o número de arestas.

Resolução

Pela relação de Euler, $V - A + F = 2$, válida para qualquer poliedro convexo, temos: $F = 11$ e $V = 18$. Logo, $V - A + F = 2 \Rightarrow 18 - A + 11 = 2 \Rightarrow A = 27$.

Portanto, o poliedro tem 27 arestas.

2. Um poliedro convexo tem seis faces quadrangulares e duas hexagonais. Calcule o número de vértices desse poliedro.

Resolução

Pelo enunciado, o poliedro possui oito faces, sendo seis quadrangulares e duas hexagonais. Vamos determinar o número de arestas:

Seis faces quadrangulares: $6 \cdot 4 = 24$ arestas

Duas faces hexagonais: $2 \cdot 6 = 12$ arestas

Como cada aresta foi contada duas vezes, temos:

$2A = 24 + 12 \Rightarrow 2A = 36 \Rightarrow A = 18$

Aplicando a relação de Euler, temos:

$V - A + F = 2 \Rightarrow V - 18 + 8 = 2 \Rightarrow V = 12$

Assim, o número de vértices é 12.

Exercícios

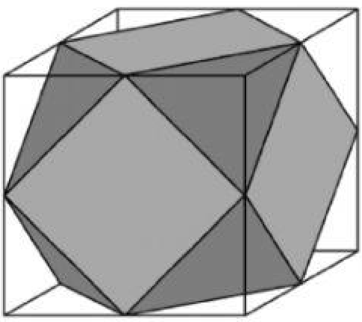
1. Em um poliedro convexo, o número de arestas é 16 e o número de faces é nove. Determine o número de vértices.

2. Um poliedro convexo tem cinco faces quadrangulares e duas faces pentagonais. Determine o número de arestas e o número de vértices.

3. (Fatec-SP) Um poliedro convexo tem 3 faces com 4 lados, 2 faces com 3 lados e 4 faces com 5 lados. Calcule o número de vértices desse poliedro.

4. (Mack-SP) Determine o número de vértices de um poliedro que tem três faces triangulares, uma face quadrangular, uma pentagonal e duas hexagonais.

5. (Unifesp-SP) Considere o poliedro cujos vértices são os pontos médios das arestas de um cubo.



EDITORIA DE ARTE

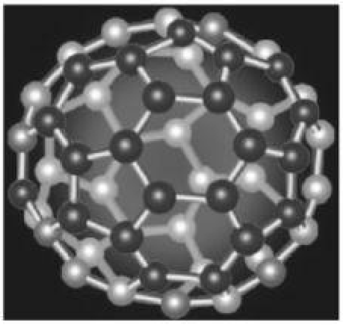
O número de faces triangulares e o número de faces quadradas desse poliedro são, respectivamente:

a) 8 e 8.
b) 8 e 6.
c) 6 e 8.
d) 8 e 4.
e) 6 e 6.

6. Em uma publicação científica de 1985, foi divulgada a descoberta de uma molécula tridimensional de carbono, na qual os átomos ocupam os vértices de um poliedro convexo cujas faces são 12 pentágonos e 20 hexágonos regulares. Em homenagem ao arquiteto estadunidense Buckminster Fuller, a molécula foi denominada fulereno.

Fonte dos dados: BRASIL. Ministério do Trabalho. Fundacentro. **Fulerenos.** Disponível em: http://antigo.fundacentro.gov.br/nanotecnologia/fulerenos. Acesso em: 22 ago. 2020.

Determine o número de átomos de carbono nessa molécula e o número de ligações representadas pelas arestas do poliedro.



ALEXANDRE ARGOZINO NETO

Representação de molécula de fulereno (imagem sem escala; cores-fantasia).