

## • Matemática Financeira

### Sistemas de amortização

Quando adquirimos um bem de maior valor, como um automóvel ou um imóvel, é comum fazer um empréstimo ou financiamento por meio de uma instituição financeira. O valor negociado nesse tipo de transação é chamado **capital**, e deve ser restituído à instituição financeira acrescido de **juro**.

Uma vez contratado o financiamento, o processo para saldar a dívida se dá por meio de pagamentos periódicos conhecidos como **parcelas**, ou **prestações**, que são pagas em intervalos de tempo constantes, normalmente mensais. Alguns financiamentos também incluem o pagamento de quantias preestabelecidas e que são feitas em datas combinadas previamente.

Em um empréstimo ou financiamento, o valor de cada prestação é composto de uma parte do capital adquirido e do juro calculado sobre o saldo devedor. Essa parte do capital adquirido é também chamada de **amortização** ou **valor amortizado**.

Assim, considerando  $P$  o valor da prestação,  $A$  o valor amortizado e  $J$  o juro sobre o saldo devedor, podemos escrever:

$$P = A + J$$

As diferentes maneiras de se realizar esse cálculo caracterizam o que chamamos de **sistema de amortização**. Alguns dos sistemas mais utilizados são: Sistema Price ou Francês, Sistema de Amortização Constante (SAC), Sistema de Amortização Misto (SAM), entre outros.

Vamos estudar o Sistema Price e o Sistema de Amortização Constante, que costumam ser os mais praticados no mercado consumidor.

### Sistema Price

O Sistema Price, ou Sistema de Amortização Francês, é aquele que prevê o pagamento em **prestações iguais**, de valor fixo, durante todo o período de quitação do valor emprestado ou financiado. Normalmente é mais utilizado em contratos de curto prazo, como na compra de automóveis.

Acompanhe a situação a seguir.

Aline vai comprar um carro no valor de R\$ 39.500,00 e pretende pagar R\$ 7.500,00 como valor de entrada e financiar o restante da dívida em 36 prestações.

Ela conseguiu uma proposta de financiamento em um banco, a uma taxa de 2,5% ao mês, considerando o Sistema Price de amortização. O gerente enviou a ela uma planilha com algumas informações sobre as prestações. Observe as primeiras linhas dessa planilha.

Mês	Prestação	Amortização	Juros	Saldo devedor
0				R\$ 32.000,00
1	R\$ 1.358,45	R\$ 558,45	R\$ 800,00	R\$ 31.441,55
2	R\$ 1.358,45	R\$ 572,41	R\$ 786,04	R\$ 30.869,14
3	R\$ 1.358,45	R\$ 586,72	R\$ 771,73	R\$ 30.282,42

- Conhecer o valor a ser pago todo mês e o fato de a primeira parcela não ser tão alta quando comparada a outros sistemas de amortização influenciam as pessoas a optar por esse sistema.

Acompanhe uma situação em que deduzimos o valor da prestação  $P$  no sistema Price, considerando um valor  $V$ , financiado a uma taxa de juro  $i$ , que será pago em 3 prestações.

Ao fim do primeiro mês, deve-se à instituição financiadora:  $V \cdot (1 + i)$ ; e paga-se  $P$ . Assim, o saldo devedor é:

$$V(1 + i) - P$$

Ao fim do segundo mês, deve-se à instituição financiadora  $[V(1 + i) - P] \cdot (1 + i)$  e paga-se  $P$ . Assim, o saldo devedor é:

$$[V(1 + i) - P] \cdot (1 + i) - P = V(1 + i)^2 - (1 + i)P - P$$

Ao fim do terceiro mês, deve-se à instituição financiadora  $[V(1 + i)^2 - (1 + i)P - P] \cdot (1 + i)$  e paga-se  $P$ . Assim, o saldo devedor é:

$$[V(1 + i)^2 - (1 + i)P - P] \cdot (1 + i) - P = V(1 + i)^3 - (1 + i)^2P - (1 + i)P - P$$

Como a terceira prestação é a última, o saldo devedor ao fim do terceiro mês é igual a zero. Logo,  $V(1 + i)^3 - (1 + i)^2P - (1 + i)P - P = 0$ .

Isolando o valor de  $P$ , obtemos: 
$$P = \frac{V(1+i)^3}{(1+i)^2 + (1+i) + 1}$$

Substituindo  $(1 + i)^2 + (1 + i) + 1$  por  $\frac{(1+i)^3 - 1}{(1+i) - 1}$ , temos: 
$$P = \frac{V(1+i)^3}{\frac{(1+i)^3 - 1}{(1+i) - 1}} = \frac{V(1+i)^3 \cdot i}{(1+i)^3 - 1}$$

Generalizando esse resultado, apresentamos a seguir uma forma de calcular o valor da prestação nesse sistema de amortização.

O valor  $P$  da prestação no Sistema Price pode ser calculado utilizando-se a expressão  $P = V \cdot \frac{(1+i)^n \cdot i}{(1+i)^n - 1}$ , em que  $V$  é o valor financiado,  $i$  a taxa de juro ao mês e  $n$  a quantidade de prestações a serem quitadas.

Atualmente os *softwares* de planilhas eletrônicas apresentam funções que permitem criar uma tabela com os valores envolvidos em todo o financiamento, que é também conhecida como **Tabela Price**.

## Sistema de Amortização Constante (SAC)

Assim como o nome sugere, o Sistema de Amortização Constante (SAC) é aquele no qual a amortização  $A$  é constante, caracterizando um sistema mais agressivo de amortização, quando comparado ao Price. Com isso, as parcelas iniciais costumam ser mais altas.

Nesse sistema, a amortização de uma dívida é calculada pela razão entre o capital  $C$  contratado e a quantidade  $n$  de parcelas, indicada por:

$$A = \frac{C}{n}$$

Normalmente esse sistema é mais utilizado em contratos de longo prazo, envolvendo quantias muito grandes, como na compra de imóveis.



Acompanhe a situação a seguir.

Pedro e Amanda são sócios em uma loja de móveis e aproveitaram uma oportunidade para investir em um imóvel onde a loja funciona atualmente, que é um local alugado. Para isso, precisaram fazer um empréstimo de R\$ 70.000,00, a juros de 7,8% ao ano, pelo SAC.

- Situações envolvendo empréstimos requerem cuidado e planejamento, não apenas considerando taxas de juro, mas também os sistemas de amortização.

Quando analisaram as possibilidades e a proposta da instituição financeira, optaram por um período de 10 anos de financiamento.

Como a amortização é um valor fixo que compõe parte do valor de cada prestação, o saldo devedor diminuirá a cada mês, de acordo com o pagamento das parcelas. Consequentemente, o valor do juro que será calculado sobre o saldo devedor também diminuirá, fazendo o valor da próxima parcela ser inferior ao valor da parcela anterior.

Nesse caso, o valor amortizado em cada prestação é R\$ 583,33:

$$R\$ 70.000,00 : 120 = R\$ 583,33.$$

O valor de juro pago na primeira parcela é calculado sobre o saldo devedor, que corresponde a todo o valor emprestado. Nesse caso, como a taxa é de 7,8% ao ano, isso equivale a 0,65% ao mês. Assim temos:

$$J = 0,0065 \cdot R\$ 70.000,00 = R\$ 455,00$$

A primeira prestação é obtida adicionando a amortização e o juro correspondentes:

$$P_1 = R\$ 583,33 + R\$ 455,00 = R\$ 1.038,33$$

A segunda prestação é obtida adicionando a amortização (R\$ 583,33) com o juro correspondente, que é calculado sobre o saldo devedor (R\$ 69.416,67), ou seja,  $69\ 416,67 \cdot 0,0065 = 451,21$ . Assim:

$$P_2 = R\$ 583,33 + R\$ 451,21 = R\$ 1.034,54$$


O saldo devedor, para o cálculo de  $P_3$  é:

$$R\$ 69.416,67 - R\$ 583,33 = R\$ 68.833,34.$$

Observe como podemos organizar esses valores em uma planilha e calcular os valores das cinco primeiras prestações.

Mês	Saldo devedor	Amortização	Juros	Prestação
0	R\$ 70.000,00			
1	R\$ 69.416,67	R\$ 583,33	R\$ 455,00	R\$ 1.038,33
2	R\$ 68.833,34	R\$ 583,33	R\$ 451,21	R\$ 1.034,54
3	R\$ 68.250,01	R\$ 583,33	R\$ 447,42	R\$ 1.030,75
4	R\$ 67.666,68	R\$ 583,33	R\$ 443,62	R\$ 1.026,95
5	R\$ 67.083,35	R\$ 583,33	R\$ 439,83	R\$ 1.023,16

## > ATIVIDADES RESOLVIDAS

-  **1.** Marília vai fazer um empréstimo de R\$ 50.000,00 para uma reforma em seu estúdio de fotografia e está analisando qual sistema de amortização vai utilizar, de acordo com as propostas de uma agência financiadora, que trabalha com uma taxa de 0,95% ao mês. Ela pretende saldar a dívida em 6 anos.
- Qual será o valor amortizado em cada parcela se Marília decidir pelo SAC? De quanto será a primeira prestação nesse caso?
  - Se decidir pelo Sistema Price, qual será o valor de cada prestação? Qual será o valor amortizado na primeira prestação?

### Resolução

- a) Como no SAC o valor amortizado é constante em todo o período de quitação, dividimos o capital pela quantidade de prestações. Assim, temos:

$$A = \frac{50000}{72} = 694,4444\dots$$

Utilizando duas casas decimais, por se tratar de valor monetário, arredondamos para 694,44. Assim, o valor amortizado em cada parcela será de R\$ 694,44.

O juro pago na primeira prestação é calculado considerando todo o capital emprestado, pois ainda não houve amortização. Nesse caso, temos:

$$J = 0,0095 \cdot \text{R\$ } 50.000,00 = \text{R\$ } 475,00$$

Logo,  $P_1 = \text{R\$ } 694,44 + \text{R\$ } 475,00 = \text{R\$ } 1.169,44$ .

No SAC, a primeira prestação será de R\$ 1.169,44.

- b) No Sistema Price, o valor da prestação é constante em todo o período de quitação, e pode ser obtido por meio da expressão:

$$P = V \cdot \frac{(1+i)^n \cdot i}{(1+i)^n - 1}$$

Substituindo  $V$  por 50 000,  $i$  por 0,0095 e  $n$  por 72, e utilizando uma calculadora científica, obtemos o valor de  $P$ .

$$P = 50000 \cdot \frac{(1+0,0095)^{72} \cdot 0,0095}{(1+0,0095)^{72} - 1} \approx 961,979186$$

Utilizando duas casas decimais, por se tratar de valor monetário, como a terceira casa decimal é maior do que 5, arredondamos para 961,98. Assim, o valor de cada prestação será de R\$ 961,98 no sistema Price.

Como no SAC, o juro pago na primeira prestação é calculado sobre todo o valor tomado como empréstimo. Recuperando o valor calculado no item a, temos  $J = \text{R\$ } 475,00$ .

Logo,  $A = \text{R\$ } 961,98 - \text{R\$ } 475,00 = \text{R\$ } 486,98$ .

Portanto, o valor amortizado na primeira prestação é R\$ 486,98.



2. Construa uma planilha eletrônica simulando os valores das prestações de amortização e dos juros cobrados pela agência financiadora da atividade anterior para auxiliar Marília a analisar a situação proposta.




### Resolução

Vamos utilizar o **Calc**, que faz parte do **LibreOffice**, para construir a planilha. Ele é um *software* de uso gratuito que pode ser baixado em <<https://pt-br.libreoffice.org/baixar-ja/libreoffice-novo/>> (acesso em: 15 jul. 2020). Inicialmente, vamos construir uma tabela considerando o Sistema Price, utilizando o passo a passo a seguir.

- I. Depois de entrar no **Calc**, preparamos o local onde entrarão as variáveis (valor emprestado, taxa de juro e número de meses) e digitamos o título de cada coluna, como na imagem.

	A	B	C	D	E
1	Valor emprestado				
2	Taxa				
3	Número de meses				
4					
5	Mês	Prestação	Amortização	Juro	Saldo devedor
6					

FOTOS: LIBREOFFICE

- II. Com o botão  formatamos as células que terão valores monetários. Também formatamos a célula que vai receber a taxa, clicando em , para indicar a porcentagem, e em  duas vezes, para considerar duas casas decimais.
- III. Na primeira célula das colunas **Mês**, **Prestação**, **Amortização** e **Juro**, digitamos "0" (zero). Na primeira célula da coluna **Saldo devedor**, digitamos "=\$B\$1" e pressionamos **Enter** (o \$ serve para deixar fixa a célula indicada). Essa linha corresponde ao início do contrato.

Outra possibilidade de fixar a célula **B1** é pressionar a tecla **F4** depois de digitar "B1".

	A	B	C	D	E
1	Valor emprestado	R\$ 50.000,00			
2	Taxa	0,95%			
3	Número de meses	72			
4					
5	Mês	Prestação	Amortização	Juro	Saldo devedor
6	0	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 50.000,00
7					

- IV. Na célula **A7**, digitamos " $=A6+1$ " e teclamos **Enter**, para indicar o mês 1, ou seja, a primeira prestação.
- V. Em **B7**, vamos usar a função **PGTO** do **Calc**. Digitamos " $=PGTO(\$B\$2;\$B\$3;-\$B\$1)$ " e pressionamos **Enter**. Atenção: precisamos digitar o sinal de menos antes de " $\$B\$1$ ".
- VI. Na célula **C7**, digitamos " $=B7-D7$ " e **Enter**, mas alertamos que o resultado ainda não está correto. É necessário calcular o juro e, para isso, digitamos, na célula **D7**, " $=\$B\$2*E6$ " e pressionamos **Enter**.
- VII. Por fim, na célula **E7**, digitamos " $=E6-C7$ " e pressionamos **Enter**. Para obter as próximas linhas, selecionamos todas as células da linha que começa em 1, posicionamos o cursor por meio do *mouse* no ponto inferior direito da última célula, clicamos e arrastamos para baixo, até obter a linha do mês 72.

Vamos construir agora uma tabela considerando o SAC, utilizando o passo a passo a seguir.

- I. Vamos construir à direita da primeira tabela, utilizando as colunas **G** a **K** do **Calc**. Preparamos o local onde entrarão as variáveis (**Valor emprestado**, **Taxa de juro** e **Número de meses**) e digitamos o título de cada coluna, como na imagem.

	G	H	I	J	K
Valor emprestado					
Taxa					
Número de meses					
	Mês	Saldo devedor	Amortização	Juro	Prestação

Observe que invertemos a ordem das colunas, apenas por uma questão de organização.

- II. Repetimos o passo **II** da construção anterior para formatar as células.
- III. Na primeira célula das colunas **Mês**, **Amortização**, **Juro** e **Prestação**, digitamos "0" (zero). Na primeira célula da coluna **Saldo devedor**, digitamos "=\$H\$1" e pressionamos **Enter**. Essa linha corresponde ao início do contrato.

	G	H	I	J	K
Valor emprestado		R\$ 50.000,00			
Taxa		0,95%			
Número de meses		72			
	Mês	Saldo devedor	Amortização	Juro	Prestação
	0	R\$ 50.000,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00

FOTOS: LIBREOFFICE

- IV. Na célula **G7**, digitamos "=\$G6+1" e teclamos **Enter** para indicar o mês 1, ou seja, a primeira prestação.
- V. Em **I7**, vamos calcular a amortização, que é constante nesse sistema, digitando "=\$H\$1/\$H\$3" e pressionando **Enter**. Voltamos na célula **H7** e digitamos "=\$H6-I7", pressionando **Enter** na sequência, para obter o **Saldo devedor** depois de realizado o pagamento da primeira prestação.
- VI. Para calcular o juro, digitamos, na célula **J7**, "=\$H\$2\*\$H6" e pressionamos **Enter**.
- VII. Por fim, na célula **K7**, digitamos "=\$I7+J7" e pressionamos **Enter**, para obter o valor da primeira prestação. Para obter as próximas linhas, selecionamos as células dessa tabela partindo da linha que começa em 1, posicionamos o cursor por meio do *mouse* no ponto inferior direito da última célula, clicamos e arrastamos para baixo, até obter a linha do mês 72.



## Exercícios

1. Responda às questões a seguir, com base em alguns resultados das atividades resolvidas na seção anterior.
  - a) Em qual dos sistemas de amortização a primeira prestação é mais alta? Em sua opinião isso pode influenciar a decisão de Marília?
  - b) Comparando os valores amortizados nas primeiras prestações, o que você percebe? Esse fato interfere no montante de juro pago em todo o período de quitação da dívida?
2. Em cada situação a seguir, considerando o SAC, calcule o valor amortizado a cada prestação.
  - a) Em um empréstimo de R\$ 25.000,00 que deve ser pago em 8 prestações.
  - b) Em um financiamento de R\$ 40.000,00 que deve ser pago em 10 prestações, porém considerando uma entrada de R\$ 12.000,00.
3. Um veículo no valor de R\$ 75.000,00 está à venda de acordo com as seguintes condições.

Entrada de 25% do valor;  
O restante em 48 prestações  
com juros de 2% a.m.

De acordo com essas informações, responda.

- a) Qual é o valor a ser financiado?
  - b) Se o financiamento for feito sob o Sistema Price de amortização, qual será o valor da prestação?
  - c) Caso a opção seja pelo financiamento segundo o SAC, qual será o valor amortizado em cada prestação?
  - d) Utilizando uma planilha eletrônica para simular os valores do financiamento no Sistema Price e no SAC, qual será o montante de juro pago em todo o período?
4. Sandro vai comprar uma geladeira e se interessou pelo modelo seguinte. Sabendo que a loja trabalha com o Sistema Price de amortização, se Sandro comprar essa geladeira deverá pagar 10 prestações de:
    - a) R\$ 176,80.
    - b) R\$ 206,80.
    - c) R\$ 209,59.
    - d) R\$ 229,59.
    - e) R\$ 249,49.

- Antes de comprar um produto à prazo é importante negociar as condições de pagamento de modo a não pagar juros ou reduzir o quanto possível essa taxa.

**R\$ 2.100,00**  
**À VISTA**

ou R\$ 400,00 de  
entrada + o restante  
em 10 vezes iguais a  
juros de 4% ao mês.