



ทศนิยมซ้ำ

ดังที่ได้กล่าวมาแล้วในเล่มที่ 2 และเล่มที่ 3 ว่าทศนิยมกับเศษส่วนมีความสัมพันธ์กัน

ซึ่งถ้าเอาส่วนไปหารเศษ จะได้ค่าเป็นทศนิยม เช่น $\frac{1}{2} = 0.5$, $\frac{3}{5} = 0.6$

ในเศษส่วนบางประเภทเมื่อนำส่วนไปหารเศษแล้ว จะได้ผลหารเป็นเลขไม่ลงตัว และเมื่อหารต่อ ๆ ไป จะได้ผลลัพธ์เป็นตัวเลขชนิดเดียวกันซ้ำกันอยู่ตลอดไป

เช่น $\frac{1}{3} = 0.333...$

ได้เลข 3 ซ้ำกันไม่มีที่สิ้นสุด

$\frac{4}{9} = 0.444...$

ได้เลข 4 ซ้ำกันไม่มีที่สิ้นสุด

$\frac{2}{11} = 0.181818...$

ได้เลข 18 ซ้ำกันไม่มีที่สิ้นสุด

$\frac{1}{7} = 0.142857142857142857...$

ได้เลข 142857 ซ้ำกันไม่มีที่สิ้นสุด

$\frac{7}{15} = 0.4666...$

ได้เลข 6 ซ้ำกันไม่มีที่สิ้นสุด

ทศนิยมที่มีตัวเลขซ้ำกันไม่มีที่สิ้นสุดนี้ เรียกว่า “ทศนิยมซ้ำ” และมีวิธีการเขียนอย่างสั้น ๆ พร้อมทั้งวิธีการอ่านดังนี้

1. เขียนทศนิยมนั้นเพียงตัวซ้ำตัวแรก แล้วใส่จุดเหนือเลขซ้ำ (เมื่อซ้ำตัวเดียว)

เช่น $0.333... = 0.\dot{3}$ อ่านว่า ศูนย์จุดสาม สามซ้ำ

$0.444... = 0.\dot{4}$ อ่านว่า ศูนย์จุดสี่ สี่ซ้ำ

2. เขียนทศนิยมนั้นเพียงชุดที่ซ้ำ 1 ชุด แล้วใส่จุดเหนือตัวเลขซ้ำตัวแรกและตัวสุดท้ายของชุด

เช่น $0.181818... = 0.\dot{1}8$ อ่านว่า ศูนย์จุดหนึ่งแปด หนึ่งแปดซ้ำ

$0.142857142857142857... = 0.\dot{1}4285\dot{7}$ อ่านว่า ศูนย์จุดหนึ่งสี่สองแปด

ห้าเจ็ด หนึ่งสี่สองแปดห้าเจ็ดซ้ำ (อ่านทศนิยมซ้ำทั้งชุดก่อน แล้วทวนทั้งชุดว่าซ้ำ)

3. ในกรณีที่ไม่มีเลขไม่ซ้ำอยู่ด้วย จะเขียนจุดเหนือตัวที่ซ้ำเท่านั้น

เช่น $0.4666... = 0.4\bar{6}$ อ่านว่า ศูนย์จุดสี่หก หกซ้ำ (อ่านทั้งชุด แล้วทวนเฉพาะตัวซ้ำ)

ในกรณีที่ส่วนหารเศษลงตัวนั้น อาจกล่าวได้ว่าเป็นทศนิยมซ้ำก็ได้ ซึ่งตัวที่ซ้ำก็คือ

เลขศูนย์ (0) นั่นเอง เช่น $\frac{1}{4} = 0.25000... = 0.25\bar{0}$ แต่ไม่นิยมเขียน จึงเขียนสั้น ๆ เพียง $\frac{1}{4} = 0.25$

จากกรณีดังกล่าว จึงกล่าวได้ว่า เศษส่วนทุกจำนวนสามารถแทนได้ด้วยทศนิยมซ้ำ

การเปลี่ยนทศนิยมให้อยู่ในรูปเศษส่วน

ทศนิยมที่จะนำมาเปลี่ยนให้อยู่ในรูปเศษส่วนได้ต้องเป็นทศนิยมซ้ำเท่านั้น ซึ่งการเปลี่ยนทศนิยมซ้ำให้อยู่ในรูปเศษส่วน แบ่งได้เป็น 2 กรณี ดังนี้

1. กรณีที่เป็นทศนิยมซ้ำศูนย์ เราสามารถเขียนให้อยู่ในรูปเศษส่วนได้โดย

ให้นำเลขหลังจุดทศนิยมมาเขียนเป็นเศษแล้วเขียนส่วนด้วย 10, 100, 1,000, ... แล้วแต่ตำแหน่งของทศนิยมคือ

ถ้ามีเลขหลังจุด 1 ตัว หมายถึง มีทศนิยม 1 ตำแหน่ง ก็ใส่ 0 หนึ่งตัว

ถ้ามีเลขหลังจุด 2 ตัว หมายถึง มีทศนิยม 2 ตำแหน่ง ก็ใส่ 0 สองตัว เป็นต้น

และถ้าทศนิยมนั้นมีจำนวนเต็มอยู่หน้าจุดก็เขียนจำนวนเต็มไว้หน้าเศษส่วนนั้น เช่น

$$0.7 = \frac{7}{10}$$

$$0.13 = \frac{13}{100}$$

$$3.426 = 3\frac{426}{1,000}$$

$$14.005 = 14\frac{5}{1,000}$$

2. กรณีที่เป็นทศนิยมซ้ำตัวเลขอื่นที่ไม่ใช่ศูนย์

2.1 การเปลี่ยนทศนิยมที่เป็นทศนิยมซ้ำทั้งหมดให้อยู่ในรูปเศษส่วน

มีวิธีการทำ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 จงเขียนทศนิยมซ้ำต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปเศษส่วน

1) $0.\dot{8}$

2) $0.\dot{14}$

วิธีทำ 1) $0.\dot{8} = 0.8888... \dots\dots\dots(1)$

$(1) \times 10; 10 \times 0.\dot{8} = 8.8888... \dots\dots\dots(2)$

$(2) - (1); (10 \times 0.\dot{8}) - (1 \times 0.\dot{8}) = 8.8888... - 0.8888...$

$(10 - 1) \times 0.\dot{8} = 8$

$9 \times (0.\dot{8}) = 8$

$\therefore 0.\dot{8} = \frac{8}{9}$

วิธีทำ 2) $0.\dot{14} = 0.141414... \dots\dots\dots(1)$

$(1) \times 100; 100(0.\dot{14}) = 14.141414... \dots\dots\dots(2)$

$(2) - (1); (100 \times 0.\dot{14}) - (1 \times 0.\dot{14}) = 14.141414... - 0.141414...$

$(100 - 1) \times 0.\dot{14} = 14$

$99 \times (0.\dot{14}) = 14$

$\therefore 0.\dot{14} = \frac{14}{99}$

จากตัวอย่างข้างต้น สามารถสรุปหลักการเปลี่ยนทศนิยมซ้ำทั้งหมดให้อยู่ในรูปเศษส่วน ได้ดังนี้ ให้นำเลขหลังจุดทศนิยมเขียนเป็นเศษ แล้วใส่ส่วนด้วยเลข “9” เท่ากับจำนวนทศนิยมซ้ำ เช่น ทศนิยมซ้ำ 1 ตัว ก็ใส่ส่วน 9 หนึ่งตัว ทศนิยมซ้ำ 2 ตัว ก็ใส่ส่วน 9 สองตัว เป็นต้น

เช่น $0.\dot{6} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

$2.\dot{3}\dot{6} = 2\frac{36}{99} = 2\frac{4}{11}$

$5.\dot{1}2\dot{3} = 5\frac{123}{999} = 5\frac{41}{333}$

2.2 การเปลี่ยนทศนิยมที่เป็นทศนิยมซ้ำและไม่ซ้ำปนกันให้อยู่ในรูปเศษส่วน มีวิธีการทำดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 2 จงเขียนทศนิยมซ้ำต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปเศษส่วน

1) $0.2\dot{7}$

2) $0.5\dot{4}\dot{3}$

วิธีทำ 1) $0.2\dot{7} = 0.2777... \dots\dots\dots(1)$

$(1) \times 10; 10(0.2\dot{7}) = 2.777... \dots\dots\dots(2)$

$(2) \times 10; 100(0.2\dot{7}) = 27.777... \dots\dots\dots(3)$

$(3) - (2); (100 \times 0.2\dot{7}) - (10 \times 0.2\dot{7}) = 27.777... - 2.777...$

$(100 - 10) \times (0.2\dot{7}) = 27 - 2$

$90 \times (0.2\dot{7}) = 27 - 2$

$0.2\dot{7} = \frac{27 - 2}{90}$

$\therefore 0.2\dot{7} = \frac{25}{90}$

วิธีทำ 2) $0.5\dot{4}\dot{3} = 0.5434343... \dots\dots\dots(1)$

$(1) \times 10; 10(0.5\dot{4}\dot{3}) = 5.434343... \dots\dots\dots(2)$

$(2) \times 100; 1,000(0.5\dot{4}\dot{3}) = 543.434343... \dots\dots\dots(3)$

$(3) - (2); (1,000 \times 0.5\dot{4}\dot{3}) - (10 \times 0.5\dot{4}\dot{3}) = 543.434343... - 5.434343...$

$(1,000 - 10) \times (0.5\dot{4}\dot{3}) = 543 - 5$

$990 \times (0.5\dot{4}\dot{3}) = 543 - 5$

$0.5\dot{4}\dot{3} = \frac{543 - 5}{990}$

$\therefore 0.5\dot{4}\dot{3} = \frac{538}{990}$

จากตัวอย่างข้างต้น สามารถสรุปหลักการเปลี่ยนทศนิยมที่เป็นทศนิยมซ้ำและไม่ซ้ำ
ปนกันให้อยู่ในรูปเศษส่วนได้ดังนี้ ให้นำเลขหลังจุดทศนิยมเขียนเป็นเศษแล้วลบด้วย
ตัวเลขที่ไม่ซ้ำ แล้วใส่ส่วนด้วยเลข “9” เท่ากับจำนวนตัวเลขทศนิยมที่ซ้ำ และใส่ “0” ตาม
เท่ากับจำนวนตัวเลขทศนิยมที่ไม่ซ้ำ

$$\begin{aligned}\text{เช่น} \quad 0.2\dot{3} &= \frac{23 - 2}{90} = \frac{21}{90} = \frac{7}{30} \\ 2.34\dot{5} &= 2 \frac{345 - 34}{900} = 2 \frac{311}{900} \\ 5.1\dot{2}\dot{8} &= 5 \frac{128 - 1}{990} = 5 \frac{127}{990}\end{aligned}$$

ข้อสรุปเกี่ยวกับทศนิยมซ้ำ

1. เศษส่วนที่จะให้ค่าทศนิยมซ้ำ ได้แก่ เศษส่วนที่มีส่วนเป็นจำนวนดังนี้
 - 1.1 จำนวนเฉพาะที่ไม่ใช่ 2 หรือ 5 เช่น 3, 7, 11, 13, 17, 19, ...
 - 1.2 จำนวนที่แยกตัวประกอบได้และมีจำนวนเฉพาะ 3, 7, 11, 13, 17, 19, ...

เป็นตัวอย่างประกอบ

2. ทศนิยมซ้ำที่มีมากกว่า 1 ตัว เรียกกลุ่มทศนิยมซ้ำนั้นว่า “คาบของทศนิยมซ้ำ”



สรุป

ทศนิยมซ้ำ เกิดจากเศษส่วนที่เมื่อนำส่วนไปหารเศษแล้วได้ตัวเลขซ้ำกันไปเรื่อย ๆ ซึ่งมี 2 ชนิด คือ ทศนิยมซ้ำศูนย์ และทศนิยมซ้ำตัวเลข

การเปลี่ยนทศนิยมให้อยู่ในรูปเศษส่วน

ทศนิยมที่จะนำมาเปลี่ยนให้อยู่ในรูปเศษส่วนได้ต้องเป็นทศนิยมซ้ำเท่านั้น ซึ่งการเปลี่ยนทศนิยมซ้ำให้อยู่ในรูปเศษส่วน แบ่งได้เป็น 2 กรณี ดังนี้

1. กรณีที่เป็นทศนิยมซ้ำศูนย์ เราสามารถเขียนให้อยู่ในรูปเศษส่วนได้โดยให้นำเลขหลังจุดทศนิยมมาเขียนเป็นเศษแล้วเขียนส่วนด้วย 10, 100, 1,000, ... แล้วแต่ตำแหน่งของทศนิยม

2. กรณีที่เป็นทศนิยมซ้ำตัวเลขอื่นที่ไม่ใช่ศูนย์ แบ่งเป็น 2 กรณี คือ

2.1 การเปลี่ยนทศนิยมซ้ำทั้งหมดให้อยู่ในรูปเศษส่วน มีหลักการเปลี่ยนคือ ให้นำเลขหลังจุดทศนิยมเขียนเป็นเศษ แล้วใส่ส่วนด้วยเลข “9” เท่ากับจำนวนทศนิยมซ้ำ เช่น ทศนิยมซ้ำ 1 ตัว ก็ใส่ส่วน 9 หนึ่งตัว ทศนิยมซ้ำ 2 ตัว ก็ใส่ส่วน 9 สองตัว เป็นต้น

2.2 การเปลี่ยนทศนิยมที่เป็นทศนิยมซ้ำและไม่ซ้ำปนกันให้อยู่ในรูปเศษส่วน มีหลักการเปลี่ยนคือ ให้นำเลขหลังจุดทศนิยมเขียนเป็นเศษแล้วลบด้วยตัวเลขที่ไม่ซ้ำ แล้วใส่ส่วนด้วยเลข “9” เท่ากับจำนวนตัวเลขทศนิยมที่ซ้ำ และใส่ “0” ตาม เท่ากับจำนวนตัวเลขทศนิยมที่ไม่ซ้ำ

