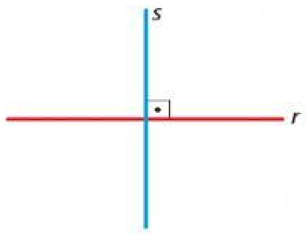
Perpendicularismo no espaço

Vimos que duas retas coplanares podem ser concorrentes, paralelas ou coincidentes. No caso de retas concorrentes, podemos ainda classificá-las de acordo com o ângulo entre elas.

Duas retas concorrentes são **perpendiculares** quando formam entre si um ângulo de 90°.



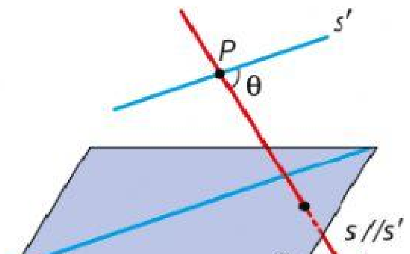
$r \perp s$

Este símbolo significa **perpendicular a.**

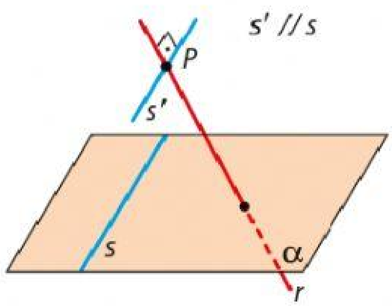
Duas retas concorrentes são **oblíquas** quando formam um ângulo diferente de 90°.

Agora vamos ver o que acontece com o ângulo entre retas reversas. Para isso, precisamos compreender o que é ângulo entre retas reversas.

Sejam *r* e *s* duas retas reversas. Consideremos sobre a reta *r* um ponto *P* e por ele tracemos a reta *s'*, paralela à reta *s*, como mostra a figura a seguir. O ângulo θ formado pelas retas *r* e *s'* é, por definição, o ângulo formado pelas retas reversas *r* e *s*. É possível demonstrar que esse ângulo não depende do ponto *P* escolhido.



Quando essas retas formam um ângulo de 90°, são chamadas de **ortogonais**.



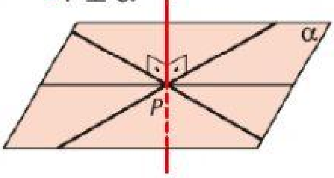
■ *r* e *s* são retas reversas ortogonais.

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

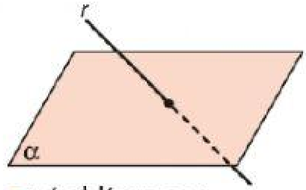
Perpendicularismo entre reta e plano

Vimos que uma reta e um plano podem ser paralelos, secantes ou a reta pode estar contida no plano. No caso de a reta ser secante ao plano, vamos ver que ela pode ser perpendicular ou oblíqua a esse plano.

■ $r \perp \alpha$



Sejam uma reta *r* e um plano α secantes em um ponto *P*. Dizemos que *r* é **perpendicular** a α quando *r* é perpendicular a todas as retas de α que passam por *P*.

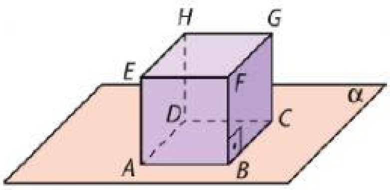


■ *r* é oblíqua a α.

Toda reta que intersecta um plano e não é perpendicular a ele é chamada **oblíqua** a esse plano.

Teorema 8: Se uma reta *r* é perpendicular a duas retas concorrentes *s* e *t* de um plano α, então ela é perpendicular ao plano α.

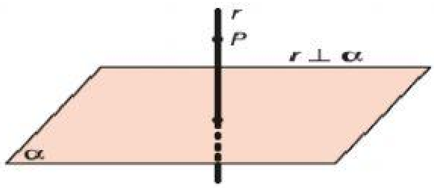
É possível demonstrar que o teorema **8** é uma condição necessária e suficiente para determinar a perpendicularidade entre reta e plano. Isso quer dizer que para a reta *r* ser perpendicular ao plano α, basta que ela seja perpendicular a duas retas concorrentes de α que passam pelo ponto *P*. Esse raciocínio será utilizado em outros conteúdos deste Capítulo.



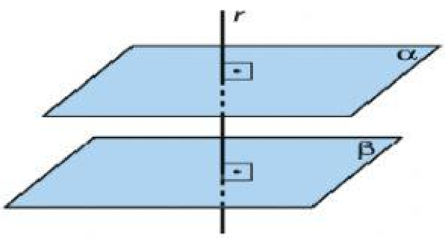
■ $\overleftrightarrow{BF} \perp \overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BF} \perp \overleftrightarrow{BC}$

Por exemplo, observe ao lado a figura do cubo apoiado no plano α. Como $\overleftrightarrow{BF}$ é perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$ e a $\overleftrightarrow{BC}$, então $\overleftrightarrow{BF}$ é perpendicular ao plano *ABC*.

A seguir, são apresentadas algumas propriedades do perpendicularismo que podem ser demonstradas.



Propriedade 1: Por um ponto *P* fora de um plano α passa uma única reta *r* perpendicular a α.

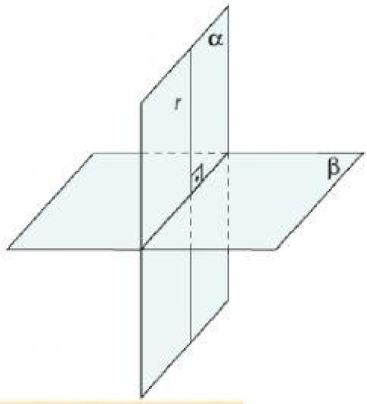


Propriedade 2: Dois planos distintos perpendiculares a uma mesma reta são planos paralelos.

Planos perpendiculares

Vimos que dois planos podem ser coincidentes, paralelos ou secantes. Vamos ver agora que, neste último caso, eles podem ser perpendiculares ou oblíquos.

Dados dois planos secantes α e β, α é **perpendicular** a β se existe uma reta *r* contida em um deles que é perpendicular ao outro.



Se dois planos secantes não são perpendiculares, eles são denominados **oblíquos**.

Teoremas sobre perpendicularismo

Apresentamos a seguir alguns teoremas sobre perpendicularismo.

Teorema 9: Se uma reta *r* é perpendicular a um plano α, então *r* faz ângulo de 90° com qualquer reta contida em α.

Teorema 10: Se uma reta *r*, secante a um plano α, forma um ângulo de 90° com duas retas concorrentes *s* e *t* desse plano α, então a reta *r* é perpendicular ao plano α.

Teorema 11: Sejam uma reta *r* e um plano α tais que $r \perp \alpha$ no ponto *A*. Sendo *s* uma reta de α que passa pelo ponto *A* e *t* uma reta de α perpendicular à *s* e concorrente com esta num ponto $B \neq A$, então qualquer reta que passa pelo ponto *B* e por um ponto *C* de *r* é perpendicular à reta *t*.

Teorema 12: Duas retas distintas, *r* e *s*, perpendiculares a um mesmo plano α, são paralelas.

> ATIVIDADES RESOLVIDAS

01. Considere as retas r, s e t distintas, tais que $s \perp r$ e $t \perp r$. Relativamente às retas s e t, podemos afirmar que:

I. Elas podem ser unicamente paralelas ou concorrentes.

II. Elas podem ser unicamente paralelas ou reversas.

III. Elas podem ser unicamente concorrentes ou reversas.

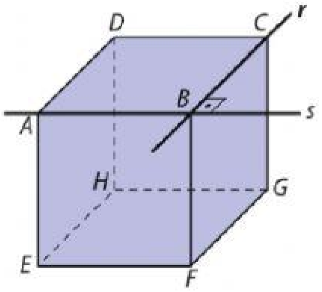
IV. Elas podem ser paralelas, concorrentes ou reversas.

V. Elas podem ser unicamente reversas.

Qual dessas afirmações é verdadeira?

Resolução

Uma das maneiras de resolver esse problema é desenhando as retas como retas suporte de arestas de um cubo. No cubo *ABCDEFGH*, representado na figura a seguir, sejam r a reta que passa por B e C, que indicaremos por $\overleftrightarrow{BC}$, e s a reta que passa por A e B, que indicaremos por $\overleftrightarrow{AB}$. Note que $s \perp r$. Nas condições do enunciado, podemos ter:



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

- $t = \overleftrightarrow{CD}$, então $s \perp r$, $t \perp r$ e $s \mathbin{/\!/} t$.
- $t = \overleftrightarrow{BF}$, então $s \perp r$, $t \perp r$ e s e t são retas concorrentes.
- $t = \overleftrightarrow{CG}$, então $s \perp r$, $t \perp r$ e s e t são retas reversas.

Portanto, a afirmação verdadeira é a **IV**.

02. Sejam um plano α e uma reta r, paralela a α. Quais proposições a seguir são verdadeiras?

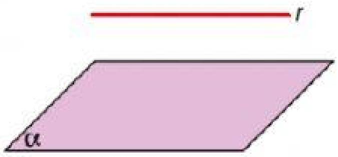
I. Toda reta paralela à r está contida em α.

II. Toda reta perpendicular à r é perpendicular a α.

III. Toda reta ortogonal à r é perpendicular a α.

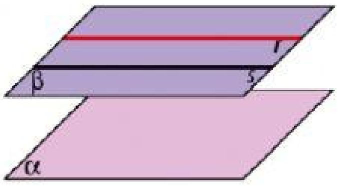
Resolução

Ilustrando o enunciado, temos a figura a seguir.

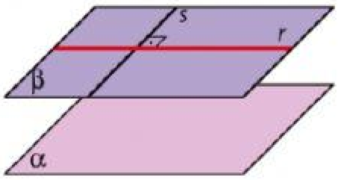


Agora, analisaremos cada uma das afirmações.

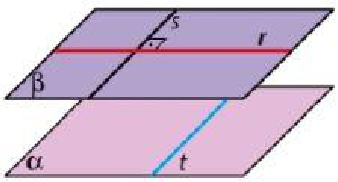
I. Falsa, pois existe um plano $\beta \mathbin{/\!/} \alpha$ que contém r. Em β existe uma reta s, $s \mathbin{/\!/} r$ e s não está contida em α.



II. Falsa. Considerando β do item **I**, existe $s \perp r$, $s \subset \beta$, $s \mathbin{/\!/} \alpha$; logo, s não é perpendicular a α.



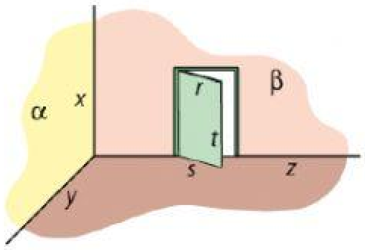
III. Falsa. Considere s do item **II**. Existe uma reta t, $t \subset \alpha$ e $t \mathbin{/\!/} s$; t é ortogonal a r e não é perpendicular a α.



Portanto, nenhuma das proposições é verdadeira.

Exercícios

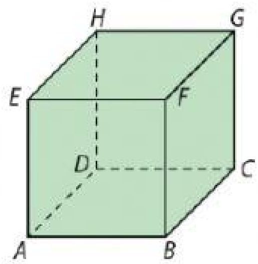
01. A figura a seguir mostra uma porta entreaberta e o canto de uma sala.



a) Que posições relativas têm as retas suporte que contêm r e s; s e t; x e r; y e t?

b) Que posições relativas têm a reta suporte de t e o plano suporte de α? E a reta suporte de r e o plano suporte de β?

02. A figura seguinte representa um cubo. Observando-a, determine as posições relativas:



a) das retas $\overleftrightarrow{EF}$ e $\overleftrightarrow{FG}$.

b) das retas $\overleftrightarrow{EF}$ e $\overleftrightarrow{BC}$.

03. (EsPCEx-SP) Considere duas retas r e s no espaço e quatro pontos distintos, A, B, C e D, de modo que os pontos A e B pertencem à reta r e os pontos C e D pertencem à reta s. Dentre as afirmações abaixo:

I. Se as retas $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BD}$ são concorrentes, então r e s são necessariamente concorrentes.

II. Os triângulos ABC e ABD serão sempre coplanares.

III. Se $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BD}$ forem concorrentes, então as retas r e s são coplanares.

Pode-se concluir que:

a) somente a I é verdadeira.

b) somente a II é verdadeira.

c) somente a III é verdadeira.

d) as afirmações II e III são verdadeiras.

e) as afirmações I e III são verdadeiras.

04. (Fatec-SP) A reta r é a intersecção dos planos α e β, perpendiculares entre si. A reta s, contida em α, intercepta r no ponto P. A reta t, perpendicular a β, intercepta-o no ponto Q, não pertencente a r. Nessas condições, é verdade que as retas:

a) r e s são perpendiculares entre si.

b) s e t são paralelas entre si.

c) r e t são concorrentes.

d) s e t são reversas.

e) r e t são ortogonais.

05. (EEM-SP)

I. Duas retas reversas podem ser ambas perpendiculares a uma mesma reta t.

II. Se r é uma reta de um plano e s uma paralela ao mesmo plano, então, certamente, r e s são paralelas.

III. Se uma reta é perpendicular a um plano, então ela é perpendicular a qualquer reta do plano.

Relativamente às afirmações acima, podemos afirmar que:

a) todas são verdadeiras.

b) somente I e II são verdadeiras.

c) somente II e III são verdadeiras.

d) somente II é verdadeira.

e) somente I é verdadeira.

06. (Fuvest-SP) É correta a afirmação:

a) Se dois planos forem perpendiculares, todo plano perpendicular a um deles será paralelo ao outro.

b) Se dois planos forem perpendiculares, toda reta paralela a um deles será perpendicular ao outro.

c) Duas retas paralelas a um plano são paralelas.

d) Se duas retas forem ortogonais reversas, toda ortogonal a uma delas será paralela à outra.

e) Se duas retas forem ortogonais, toda paralela a uma delas será ortogonal ou perpendicular à outra.