• Geometria espacial

➢ Introdução

No Ensino Fundamental estudamos vários aspectos dos poliedros. Agora, no Ensino Médio, vamos formalizar algumas ideias vistas em anos anteriores, como a definição matemática de prismas e pirâmides. Para isso, são necessários alguns conceitos da chamada **geometria espacial de posição,** que estuda a posição entre os entes geométricos e é o tema deste Capitulo. Além disso, como vimos na abertura, o desenho técnico, muito presente em áreas como o *design*, a Arquitetura e a Engenharia, utiliza conceitos da geometria descritiva, relacionada com a geometria de posição.

➢ Noções primitivas

Para iniciar os estudos da geometria espacial de posição, precisamos partir de algumas noções que são aceitas sem definição. Essas noções são as de ponto, reta e plano e são chamadas de **noções primitivas**. Veja a seguir como essas noções são representadas.



■ Ponto *A*. Em geral, para dar nome aos pontos, usamos letras maiúsculas de nosso alfabeto.



■ Reta *r*. Para nomear as retas, é comum usarmos letras minúsculas de nosso alfabeto.



■ Plano α. Para nomear os planos, usamos as letras gregas minúsculas.

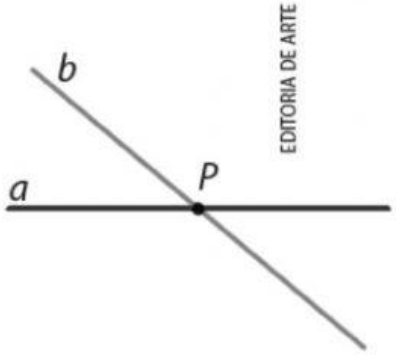
Ao longo deste Capitulo, apresentaremos diversas afirmações, que podem ser divididas em três tipos:
• **Postulados** ou **axiomas**: são proposições (afirmações matemáticas) aceitas sem necessidade de demonstração.
• **Definições**: são proposições feitas a partir de noções primitivas, de definições anteriores ou de resultados já demonstrados. As definições também não são demonstradas.
• **Teoremas**: são proposições enunciadas com base em postulados, em definições e em resultados já demonstrados. Só tem validade se forem demonstrados, ou seja, validados com base em uma argumentação logica.

Para iniciar os estudos da geometria espacial, ou seja, a geometria do espaço, apresentamos a seguir a definição de espaço no contexto da Geometria.

Espaço é o conjunto formado por todos os pontos.

Além disso, também precisamos retomar as definições de reta paralela e de reta concorrente. Assim:

Duas retas são **concorrentes** quando têm apenas um ponto comum.



LIVEWORKSHEETS

As retas a e b são concorrentes e o ponto P é o único ponto comum entre elas. Usando a notação de conjuntos, podemos escrever: $a \cap b = \{P\}$.

Duas retas são **paralelas** quando são coplanares (estão em um mesmo plano) e não têm ponto comum.



$c \parallel d$

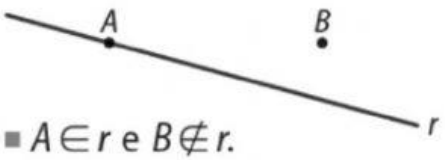
Este símbolo significa **paralelo a**.

As retas c e d são paralelas, pois estão no mesmo plano e não têm ponto comum entre elas. Usando a notação de conjuntos, escrevemos: $c \cap d = \varnothing$ ou $c \cap d = \{\}$

- **Postulados**

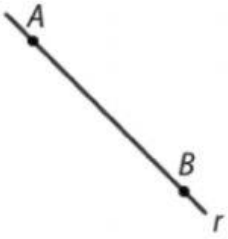
As primeiras proposições que vamos apresentar são alguns postulados relacionados a pontos, retas e planos que serão utilizados no estudo da geometria espacial.

- **Postulados da reta**



■ $A \in r$ e $B \notin r$.

R_1: Em uma reta, bem como fora dela, existem infinitos pontos.



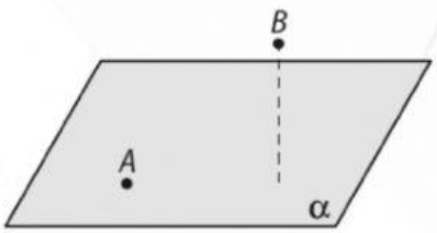
R_2: Dois pontos distintos determinam uma única reta que os contém.



R_3: Por um ponto A, fora de uma reta r, passa uma única reta s paralela à reta r.

- **Postulados do plano**

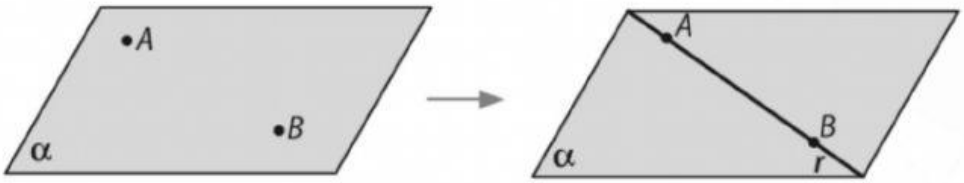
P_1: Em um plano, bem como fora dele, existem infinitos pontos.



■ $A \in \alpha$ e $B \notin \alpha$.

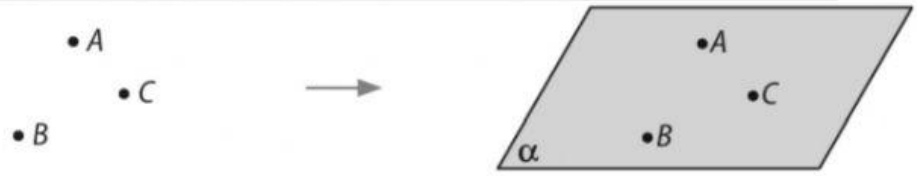
LIVEWORKSHEETS

P_2: Toda reta que tem dois pontos distintos em um plano está contida nesse plano.



■ $A \in \alpha$ e $B \notin \alpha$. ■ $r \subset \alpha$

P_3: Três pontos que não estão em uma mesma reta (não colineares) determinam um único plano.



■ A, B e C não colineares. ■ plano α.

P_4: Uma reta contida em um plano divide-o em duas regiões denominadas **semiplanos**.

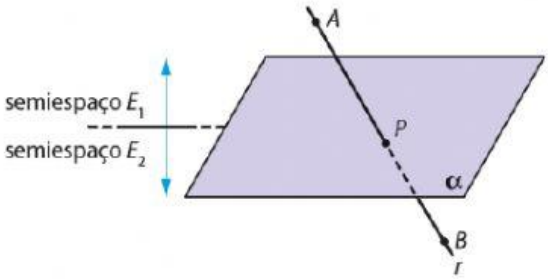


■ $r \subset \alpha$ ■ α_1 e α_2: semiplanos de origem r.

A reta r é considerada a **origem dos semiplanos**, e os semiplanos α_1 e α_2 são ditos **opostos**.

Um segmento de reta que liga um ponto qualquer de α_1 a um ponto qualquer de α_2 tem um único ponto em comum com a reta r.

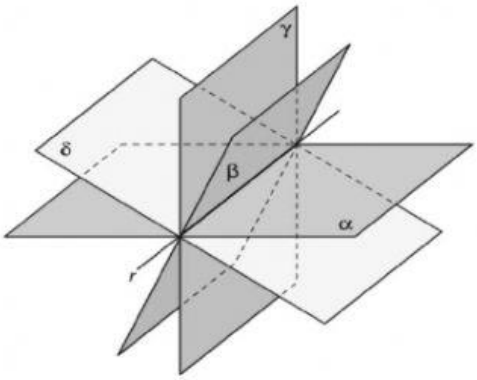
P_5: Um plano divide o espaço em duas regiões denominadas **semiespaços**.



O plano α é considerado a **origem dos semiespaços**.

Uma reta determinada por dois pontos, um em cada semiespaço, intersecta necessariamente o plano.

LIVEWORKSHEETS



P_6: Por uma reta passam infinitos planos.

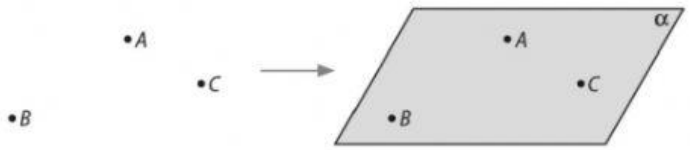
A partir desses postulados, poderemos enunciar definições e teoremas da geometria espacial de posição.

➢ **Determinação do plano**

Um plano pode ser determinado de quatro maneiras distintas. Acompanhe cada uma delas a seguir.

1ª) Pelo postulado **P_3** do plano

Três pontos distintos e não alinhados determinam um único plano.



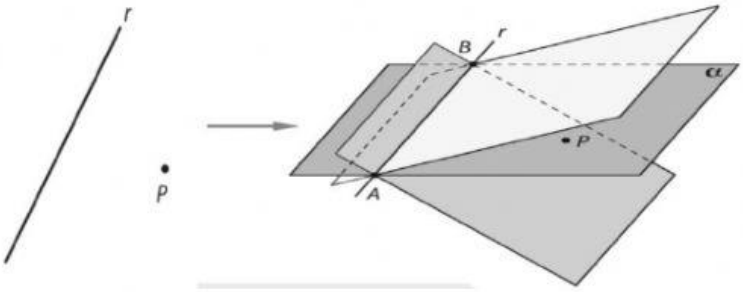
Além da indicação usando as letras gregas, também podemos denotar um plano pelos pontos que o determinam. Assim, escrevemos **plano *ABC*** para o plano determinado pelos pontos *A*, *B* e *C*.

2ª) Pelo teorema a seguir.

Teorema 1: Uma reta e um ponto fora dela determinam um único plano.

Demonstração

Seja *r* uma reta e *P* um ponto fora dessa reta. Pelo postulado **R_1** existem dois pontos distintos *A* e *B* em *r*. Dessa forma, como os pontos *A*, *B* e *P* não são colineares, pelo postulado **P_3** eles determinam um único plano.



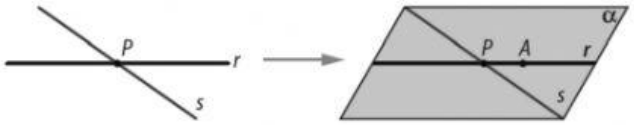
LIVEWORKSHEETS

3ª) Pelo teorema a seguir.

Teorema 2: Duas retas concorrentes determinam um único plano.

Demonstração

Sejam duas retas *r* e *s* concorrentes no ponto *P*. Considerando um ponto *A* sobre a reta *r*, distinto do ponto *P* (que existe pelo postulado $\mathbf{R}_1$), sabemos pelo teorema **1** que a reta *s* e o ponto *A*, exterior a *s*, determinam um único plano α.



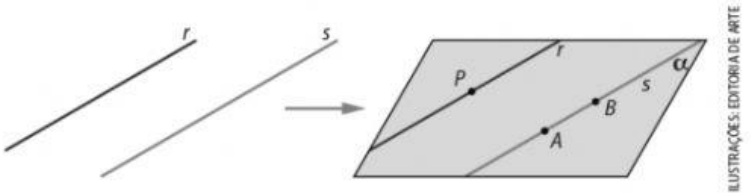
Observe que esse plano α contém a reta *s*, por construção, e também contém a reta *r*, por nele estarem situados os pontos *P* e *A* da mesma reta (postulado $\mathbf{P}_2$ do plano).

4ª) Pelo teorema a seguir.

Teorema 3: Duas retas paralelas determinam um único plano.

Demonstração

Sejam as retas paralelas *r* e *s*. Pelo postulado $\mathbf{R}_1$, considerando um ponto *P* em *r* e dois pontos *A* e *B* distintos em *s*, determinamos o plano α, uma vez que *P*, *A* e *B* são três pontos não alinhados (postulado $\mathbf{P}_3$ do plano).

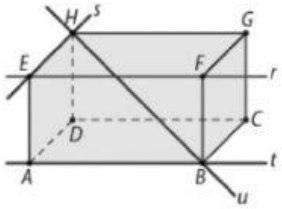


ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

➢ **Posições relativas de duas retas no plano e no espaço**

Para determinar quais são as possíveis posições relativas de retas, observamos se as retas estão em um mesmo plano e se há pontos em comum entre elas.

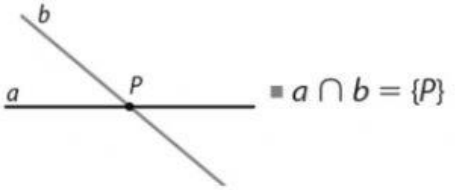
Duas retas são **coplanares** quando existe um plano que as contém.



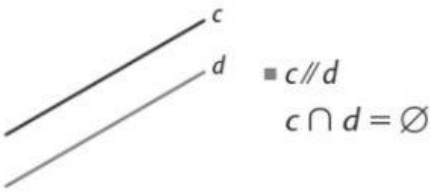
Por exemplo, na figura ao lado, as retas *r* e *s* são coplanares. Veja que elas são concorrentes no ponto *E* (pelo teorema **2**, determinam um único plano). Duas retas complanares são:

LIVEWORKSHEETS

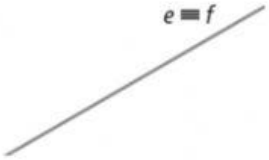
Concorrentes quando têm apenas um ponto comum.



Paralelas quando não têm ponto comum.



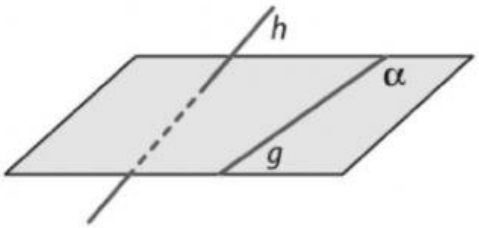
Coincidentes quando têm todos os pontos comuns.



$e \equiv f$ ou $e = f$

Este símbolo significa **identicamente igual a**.

Duas retas são **reversas** quando não existe um plano que as contém.



Com as classificações apresentadas, podemos montar um fluxograma que nos auxilia a compreender cada um dos casos de posições relativas de duas retas no plano e no espaço.

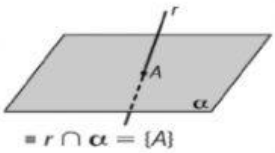


LIVEWORKSHEETS

➢ Posições relativas de uma reta e um plano no espaço

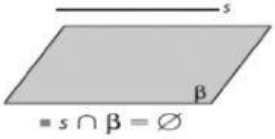
Agora, vamos ver como uma reta e um plano podem estar posicionados no espaço. Para isso, vamos observar o número de pontos comuns que eles têm.

Uma reta r e um plano α são **secantes**, ou **concorrentes**, quando têm um único ponto em comum.



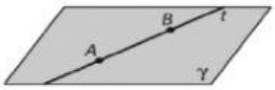
$r \cap \alpha = \{A\}$

Uma reta s e um plano β são **paralelos** quando não têm ponto em comum.



$s \cap \beta = \varnothing$

Uma reta t está **contida** em um plano γ quando ambos têm em comum todos os pontos da reta t.



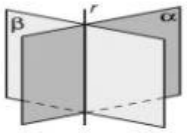
$t \subset \gamma$

Pelo postulado P_2, basta que a reta t e o plano γ tenham mais de um ponto comum para que essa reta esteja contida nesse plano.

➢ Posições relativas de dois planos no espaço

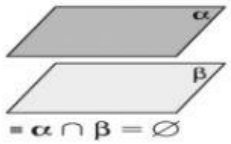
Para finalizar as posições relativas, vamos ver como dois planos no espaço podem se relacionar. Mais uma vez, vamos observar os pontos comuns entre eles.

Dois planos α e β são **secantes**, ou **concorrentes**, quando têm uma única reta em comum.



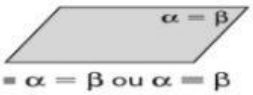
$\alpha \cap \beta = r$

Dois planos α e β são **paralelos** quando não têm ponto em comum.



$\alpha \cap \beta = \varnothing$

Dois planos α e β são **coincidentes** quando têm mais de uma reta em comum (3º e 4º casos da determinação do plano).



$\alpha = \beta$ ou $\alpha = \beta$

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

> ATIVIDADE RESOLVIDA

1. Dados, em um plano, duas retas distintas tangentes a uma mesma circunferência, classifique as afirmações a seguir em verdadeiras ou falsas, justificando-as.

a) As retas são necessariamente concorrentes.

b) As retas são necessariamente paralelas.

c) As retas podem ser paralelas.

Resolução

Para cada item, vamos buscar um contraexemplo para comprovar que a afirmação é falsa ou utilizaremos os resultados já estudados para mostrar que a afirmação é verdadeira.

a) Essa afirmação é falsa, pois, caso as retas sejam tangentes em pontos diametralmente opostos da circunferência, elas serão paralelas.

b) Essa afirmação é falsa, pois as retas só serão paralelas na situação indicada no item anterior. Em qualquer outra situação, as retas serão concorrentes.

c) Como vimos nos itens anteriores, as retas podem ser paralelas ou concorrentes. Então essa afirmação é verdadeira. Note que a afirmação traz uma possibilidade e não uma afirmação absoluta, válida para todos os casos. Isso faz com que não precisemos demonstrá-la, mas apenas determinar um caso que a atenda.

LIVEWORKSHEETS

Exercícios

1. Leia as afirmações a seguir.

I. _____ pontos distintos determinam uma única reta.

II. Em um plano, estão contidas _____ retas.

III. Uma reta em um plano divide-o em duas regiões, denominadas _____.

IV. Por uma reta passam _____ planos.

V. Podemos determinar um plano de _____ maneiras.

As palavras que preenchem corretamente as lacunas, na ordem, são:

a) dois – infinitas – semiespaços – infinitos - quatro

b) infinitos – infinitas – semiespaços – infinitos – quatro

c) dois – infinitas – semiplanos – infinitos – quatro

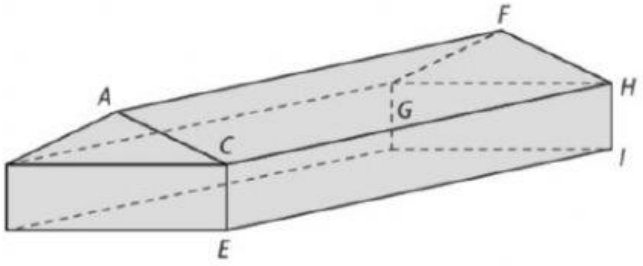
d) infinitos – duas – semiplanos – dois – infinitas

e) dois – duas – semiplanos – dois – infinitas

2. Quantos são os planos determinados por três retas distintas, duas a duas, paralelas entre si?

3. Quantos são os planos determinados por quatro pontos, dois a dois, distintos entre si?

4. Dada a figura, considere a reta suporte de cada segmento de reta da figura e identifique:



a) um par de retas reversas;

b) um par de retas coplanares;

c) dois pares de retas concorrentes;

d) dois pares de retas paralelas.

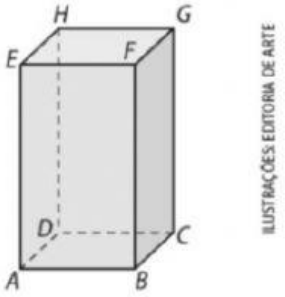
5. Considere um ponto *M* em um plano α e uma reta *r*, secante a α, que o "fura" em um ponto distinto de *M*. Reúna-se com um colega e façam o que se pede em cada item.

a) Façam um desenho que represente a situação.

b) Verifiquem se a frase a seguir é verdadeira ou falsa. Justifiquem sua resposta.

Existem infinitas retas contidas em α que passam pelo ponto *M* e pelo ponto de intersecção de *r* e α.

6. Observando a figura a seguir, responda.



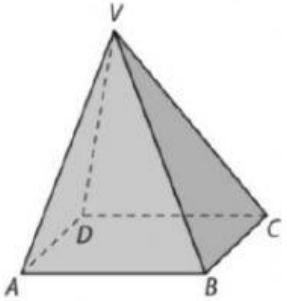
ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

a) Qual é a posição da reta $\overleftrightarrow{BF}$ em relação ao plano *ABC*?

b) Qual é a posição da reta $\overleftrightarrow{FG}$ em relação ao plano *FGH*?

• Reúna-se a um colega, e elaborem duas outras perguntas sobre posições relativas com base na figura. Depois troquem com outra dupla e confiram juntos as respostas.

7. Observando a figura seguinte, responda.



a) Qual é a posição relativa entre os planos *VAB* e *VBC*?

b) Qual é a intersecçao dos planos *ABC* e *VBC*?

c) Há planos paralelos na figura?

LIVEWORKSHEETS