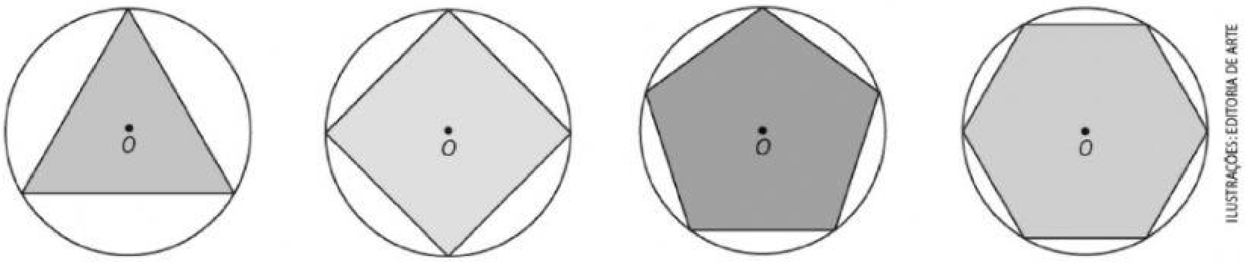
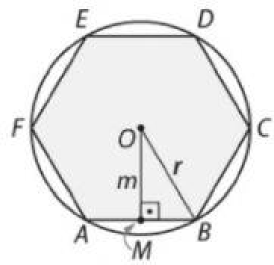
- **Polígonos regulares**

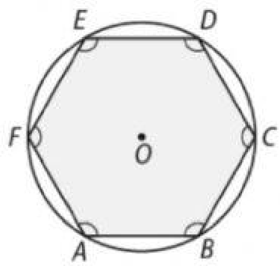


▪ Triângulo equilátero inscrito. ▪ Quadrado inscrito. ▪ Pentágono inscrito. ▪ Hexágono inscrito.

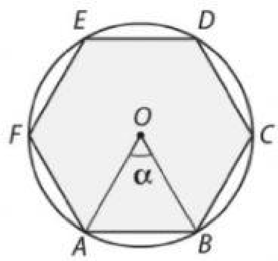
➢ Elementos de um polígono regular inscrito em uma circunferência



O centro O e o raio r da circunferência na qual o polígono regular está inscrito são denominados, respectivamente, **centro** e **raio do polígono**. A distância m do centro O até o ponto médio M de um lado do polígono regular denomina-se **apótema** do polígono.



Os ângulos cujos lados são dois lados consecutivos do polígono são chamados de **ângulos internos** do polígono. A medida de cada ângulo interno de um polígono de n lados é dada por $\beta = \frac{(n-2)\cdot 180°}{n}$



Um ângulo α cujo vértice está no centro da circunferência circunscrita ao polígono regular e cujos lados passam por dois vértices consecutivos desse polígono é chamado de **ângulo central** do polígono. A medida de um ângulo central de um polígono regular é dada por $\alpha = \frac{360°}{n}$, sendo n o número de lados do polígono.

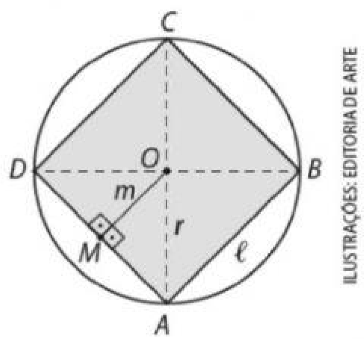
➢ Relações métricas nos polígonos Regulares Quadrado

Considere o quadrado $ABCD$, inscrito em uma circunferência de raio r, representado na figura. Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo AOD, temos:

$$\ell^2 = r^2 + r^2 \Rightarrow \ell^2 = 2r^2 \Rightarrow \ell = r\sqrt{2}$$

Assim:

$$\ell = r\sqrt{2}$$



O segmento de reta $\overline{OM}$ é congruente aos segmentos $\overline{DM}$ e $\overline{MA}$.
Observe, na figura anterior, que:

$$m + m = \ell \Rightarrow 2m = \ell \Rightarrow m = \frac{\ell}{2} \Rightarrow m = \frac{r\sqrt{2}}{2}$$

Portanto:

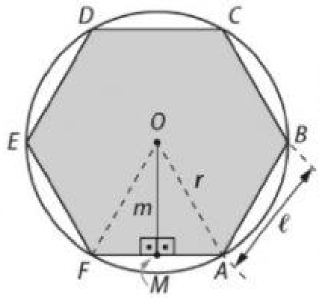
$$m = \frac{r\sqrt{2}}{2}$$

➢ Hexágono regular

Considere o hexágono regular *ABCDEF*, inscrito em uma circunferência de raio *r*, representado na figura. Observe que:

- $\text{med}\left(F\hat{O}A\right) = \frac{360°}{6} = 60°$
- $\overline{OA} \cong \overline{OF}$ e $O\hat{F}A \cong O\hat{A}F$ (pois o triângulo *OAF* é isósceles)

Assim, $\text{med}\left(O\hat{F}A\right) = \text{med}\left(O\hat{A}F\right) = 60°$, pois $\frac{180° - 60°}{2} = 60°$ e podemos concluir que o triângulo *OAF* é equilátero.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Como *AOF* é um triângulo equilátero, então:

$$\ell = r$$

Como $\frac{FA}{2} = \frac{\ell}{2} = \frac{r}{2}$, então:

$$r^2 = m^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2 \Rightarrow r^2 = m^2 + \frac{r^2}{4} \Rightarrow m^2 = \frac{3r^2}{4} \Rightarrow m = \frac{r\sqrt{3}}{2}$$

Assim:

$$m = \frac{r\sqrt{3}}{2}$$

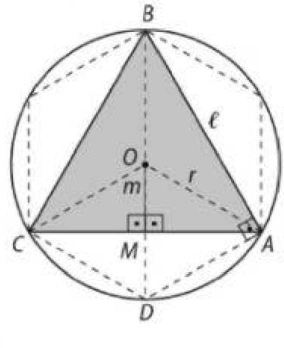
➢ Triângulo equilátero

Considere o triângulo equilátero *ABC*, inscrito em uma circunferência de raio *r*, representado na figura. Observe que $\overline{AD}$ é o lado de um hexágono regular inscrito em uma circunferência, então, pelo que vimos, $AD = r$. Dessa forma, pelo teorema de Pitágoras:

$$(BD)^2 = \ell^2 + (DA)^2 \Rightarrow (2r)^2 = \ell^2 + r^2 \Rightarrow 4r^2 = \ell^2 + r^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \ell^2 = 3r^2 \Rightarrow \ell = r\sqrt{3}$$

Assim:

$$\ell = r\sqrt{3}$$



Agora, aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo *OMA*, temos:

$$(OA)^2 = (OM)^2 + (MA)^2 \Rightarrow r^2 = m^2 + \left(\frac{r\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow m^2 = r^2 - \frac{r^2 \cdot 3}{4} \Rightarrow m^2 = \frac{r^2}{4} \Rightarrow m = \frac{r}{2}$$

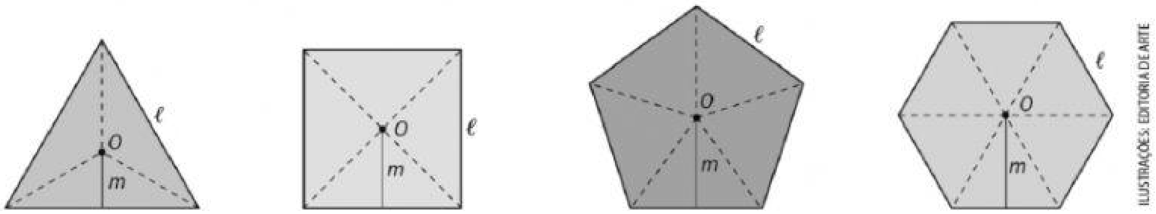
Portanto:

$$m = \frac{r}{2}$$

➢ Área de um polígono regular

Vamos considerar os polígonos regulares a seguir, em que:

- ℓ é a medida do lado;
- m é a medida do apótema;
- O é o centro do polígono;
- $n \cdot \ell$ é a medida do perímetro ($2p$, em que p é a medida do semiperímetro do polígono).



■ Triângulo equilátero. ■ Quadrado. ■ Pentágono regular. ■ Hexágono regular.

Unindo o centro O de um polígono regular de n lados a cada um dos seus vértices, esse polígono fica decomposto em n triângulos isósceles congruentes.

Como a medida da altura de cada um desses triângulos é igual à medida do apótema do polígono, a área de cada um desses polígonos é igual a n vezes a área do triângulo formado: $A = \frac{(n \cdot \ell \cdot m)}{2}$.

Como $n\ell$ é a medida do perímetro do polígono, a área também pode ser expressa por:

$$A = \frac{2pm}{2} \Rightarrow A = p \cdot m$$

A área de um polígono regular de n lados é igual ao produto da medida p, do semiperímetro, pela medida m, do apótema.

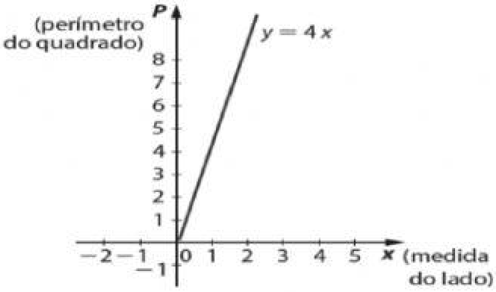
➢ Área e perímetro de um polígono regular em função da medida dos lados

Considere a situação a seguir.

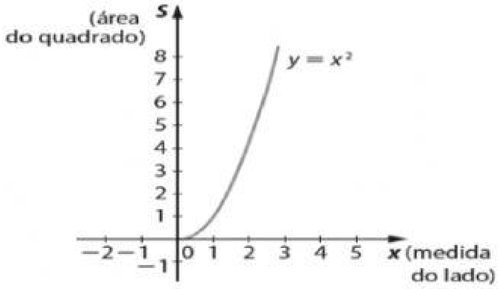
Para cercar um terreno quadrado de 4 metros de lado, Antônio usou 16 metros de arame. Seu cliente, satisfeito com o trabalho realizado, pediu que ele colocasse cerca em outro terreno, também quadrado, mas com o quádruplo da área do primeiro. Antônio ficou pensando se usaria, então, o quádruplo da metragem de arame. Para compreender melhor o problema, vamos relacionar o perímetro P e a área S de um quadrado, em função da medida x do seu lado:

x (em metro)	P (em metro)	S (em metro quadrado)
1	4	1
2	8	4
3	12	9
4	16	16
5	20	25
6	24	36
7	28	49
8	32	64
n	$4n$	n^2

Agora, vamos observar essas variações graficamente:



■ Variação do perímetro do quadrado em função da medida x do lado.



■ Variação da área do quadrado em função da medida x do lado.

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Para construir esses gráficos, consideramos apenas valores de $x > 0$, pois x representa a medida do lado do quadrado.

O perímetro P de um quadrado é diretamente proporcional à medida de seu lado e é modelado pela função afim dada por $P(x) = 4x$. Já a área S do quadrado, em função da medida x do lado, corresponde à função quadrática definida por $S(x) = x^2$.

> ATIVIDADES RESOLVIDAS

1 Determine a área S de um quadrado inscrito em uma circunferência de 5 dm de raio.

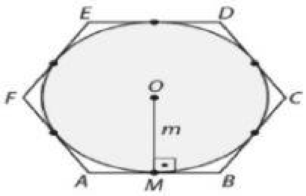
Resolução

Nesse caso, o lado do quadrado é dado por: $\ell = r\sqrt{2}$, ou seja, $\ell = 5\sqrt{2}$ dm.

Logo, $S = \ell^2 = \left(5\sqrt{2}\right)^2 = 50$

Portanto, $S = 50\ \text{dm}^2$.

2 Determine a medida R do raio da circunferência inscrita no hexágono regular cujo lado mede 4 cm.



Resolução

A medida do raio da circunferência inscrita em um polígono regular é igual à medida do apótema desse polígono. Assim, $R = m$.

Para o hexágono regular, temos: $\ell = r$ e $m = \dfrac{r\sqrt{3}}{2}$, em que r é a medida do raio da circunferência circunscrita ao hexágono.

De acordo com o enunciado, temos $\ell = r = 4$ cm. Assim:

$$m = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

Logo a medida R do raio da circunferência inscrita é $2\sqrt{3}$ cm.

3 Sabendo que uma circunferência tem 10 cm de raio, determine a medida do lado e a medida do apótema do hexágono regular nela inscrito.

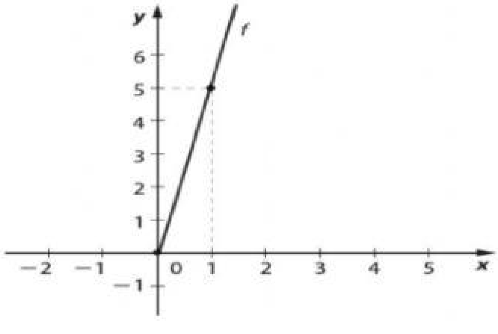
Resolução

Como temos um hexágono regular inscrito em uma circunferência de raio r, sabemos que $\ell = r$, e portanto, $\ell = 10$ cm.

Nessas condições a medida m do apótema do hexágono regular é dada por $m = \dfrac{r\sqrt{3}}{2}$, ou seja, $m = \dfrac{10\sqrt{3}}{2}$.

Logo, $m = 5\sqrt{3}$ cm.

4 Observe o gráfico representado e faça o que se pede a seguir.



a) Escreva a lei de formação da função representada.

b) Considerando que essa função representa a variação do perímetro P de um polígono regular em função da medida do seu lado, identifique esse polígono, justificando.

Resolução

a) Conhecemos dois pares ordenados do gráfico: (0, 0) e (1, 5). Como se trata de uma reta, tem-se que $f(x) = ax + b$. Como a função passa por (0, 0), $b = 0$. Assim, $f(x) = ax$. Para $x = 1$, $y = 5$. Logo, $a = 5$.
Portanto, a lei de formação da função é $f(x) = 5x$, com $x > 0$.

b) A lei da função é $f(x) = 5x$. Isso quer dizer que, para uma medida x do lado desse polígono, o perímetro é $5x$. Como se trata de um polígono regular, todos os lados têm mesma medida, então concluímos que esse polígono é um pentágono regular.

1 Dado um triângulo equilátero, cujo lado mede 6 cm, calcule:

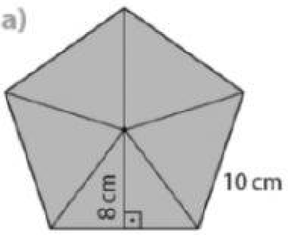
a) o raio da circunferência circunscrita;

b) a medida do apótema.

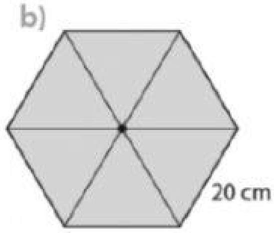
2 Na circunferência de raio 2 cm está inscrito um hexágono regular. Qual é a área desse polígono?
(Adote $\sqrt{3} \simeq 1{,}73$.)

3 Calcule as áreas dos polígonos regulares representados a seguir.

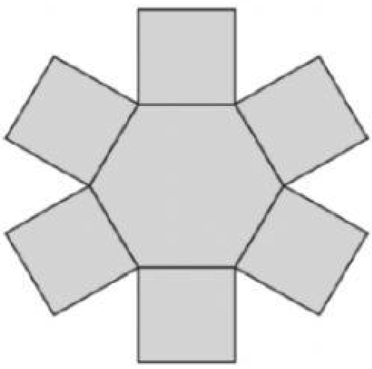
a)



b)



4 A figura a seguir foi recortada de uma cartolina e é formada por um hexágono regular e seis quadrados. Cada lado do hexágono mede 10 cm.



Considerando $\sqrt{3} \simeq 1{,}73$, quantos centímetros quadrados de cartolina foram usados para fazer a figura?

5 Calcule a área de um triângulo equilátero, sabendo que seu apótema mede 3 cm.

6 São dados dois quadrados: um inscrito e outro circunscrito à mesma circunferência. Determine a razão entre:

a) o perímetro do quadrado inscrito e o do quadrado circunscrito;

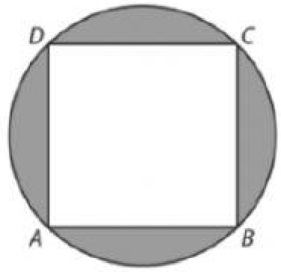
b) a área do quadrado inscrito e a do quadrado circunscrito.

7 O apótema de um hexágono regular mede $6\sqrt{3}$ cm. Nessas condições, determine:

a) a medida do seu lado;

b) sua área.

8 Na figura a seguir, o quadrado *ABCD* está inscrito em uma circunferência. Sabendo que o lado desse quadrado mede *a*, expresse, em função de *a*, a área da região sombreada.

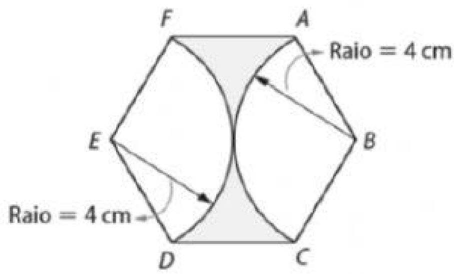


9 Observe a relação entre a medida dos lados e o perímetro de um polígono regular. Identifique qual é esse polígono regular e justifique sua resposta.

Medida do lado	2	3	4	5
Medida do perímetro	20	30	40	50

10 Considerando os estudos sobre a variação da área e do perímetro de um polígono regular em função da medida do lado, elabore um problema e resolva-o. Depois troque-o com um de seus colegas e resolva o problema proposto por ele. Em seguida, discutam as soluções, verificando se chegaram às mesmas conclusões e quais procedimentos utilizaram.

11 (Ence-RJ) A figura abaixo representa um hexágono regular.



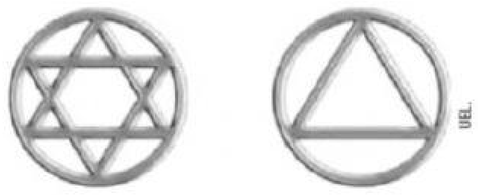
Calcule:

a) a medida do seu apótema;

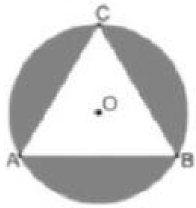
b) a área da região colorida de verde.

12 Calcule a área de um hexágono regular cujo lado mede 6 cm.

13 (UEL-PR) Algumas figuras geométricas são utilizadas em símbolos, como, por exemplo, a "Estrela de David" (Figura 1).



■ Figura 1 ■ Figura 2



■ Figura 3

A partir das Figuras 1 e 2, desenhou-se um esquema, representado na Figura 3, que não obedece a uma escala. Sabe-se que, na Figura 3, estão representados uma circunferência de centro no ponto O e um triângulo equilátero (ABC), inscrito nessa circunferência.

Considerando que o raio da circunferência é de $\sqrt{48}$ cm, responda aos itens a seguir.

a) Determine a medida do lado do triângulo ABC. Justifique sua resposta apresentando os cálculos realizados na resolução deste item.

b) Determine a área representada pela cor cinza na Figura 3. Justifique sua resposta apresentando os cálculos realizados na resolução deste item.

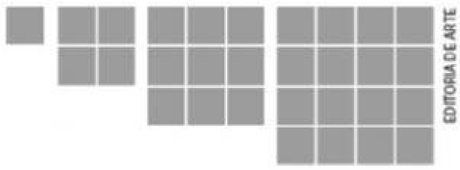
14 Em algumas cidades, serão construídas praças na forma de octógono regular. Para isso, foi elaborado um projeto, em que consta a medida *m* do lado do octógono, uma vez que o comprimento do lado poderia variar conforme o local para a construção da praça.

a) Faça um esboço do polígono regular que representa a praça.

b) Qual a função que relaciona o perímetro *P* e a medida do lado *m* do octógono regular?

c) Construa o gráfico que representa essa função.

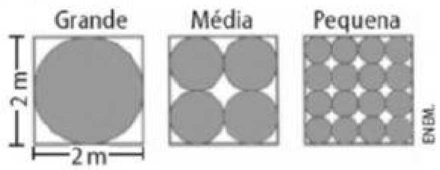
15 Observe a sequência de figuras abaixo, formadas por quadrados alaranjados congruentes:



Considere a medida do lado de um quadrado ■ como sendo 1 unidade de comprimento (u.c.), e a área desse quadrado como 1 unidade de área (u.a.), e copie o quadro a seguir no seu caderno, completando-o.

Medida do lado (em u.c.)	1	2	3	4	5
Medida do perímetro (em u.c.)	4	8			
Medida da área (em u.a.)	1	4			

16 (Enem/MEC) Uma empresa produz tampas circulares de alumínio para tanques cilíndricos a partir de chapas quadradas de 2 metros de lado, conforme a figura. Para 1 tampa grande, a empresa produz 4 tampas médias e 16 tampas pequenas.



Área do círculo: πr^2

As sobras de material de produção diária das tampas grandes, médias e pequenas dessa empresa são doadas, respectivamente, a três entidades: I, II e III, para efetuarem reciclagem do material. A partir dessas informações, pode-se concluir que:

a) a entidade I recebe mais material do que a entidade II;

b) a entidade I recebe metade do material da entidade III;

c) a entidade II recebe o dobro de material da entidade III;

d) as entidades I e II recebem, juntas, menos material do que a entidade III;

e) as três entidades recebem iguais quantidades de material.