Área de polígonos

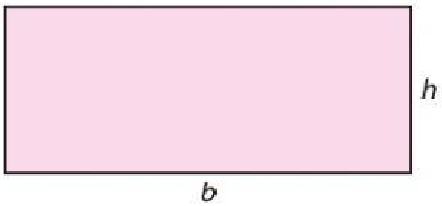
O Estádio Municipal Paulo Machado de Carvalho, conhecido como Pacaembu, em São Paulo, teve seu campo de futebol, de 105 m de comprimento por 68 m de largura, ocupado por um hospital de campanha durante 84 dias, em 2020, para o tratamento de pacientes com covid-19.

Para determinar a área do hospital de campanha, utilizando essas informações, podemos realizar uma aproximação, calculando a área do campo de futebol. Para isso, precisamos retomar o cálculo da área de um retângulo visto no Ensino Fundamental. A seguir, veremos como determinar a área desse e de outros polígonos.

Área do retângulo

A área S de um retângulo de lados de medidas b e h, com b e h reais positivos, é dada pelo produto da medida da base b pela medida da altura h.

EDITORIA DE ARTE

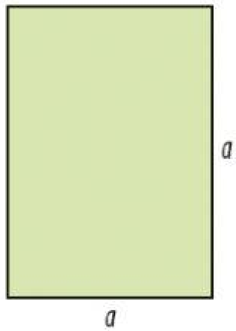


$$S = b \cdot h$$

Área do quadrado

Todo quadrado é um retângulo com lados de medidas iguais. Logo, a área S de um quadrado é igual ao produto das medidas de seus lados (a).

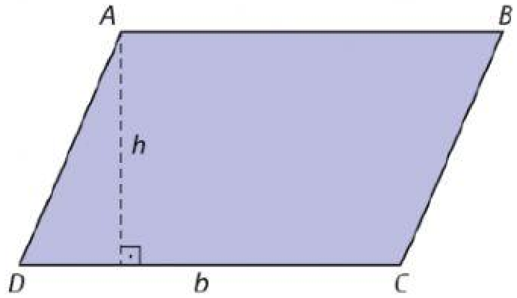
$$S = a^2$$



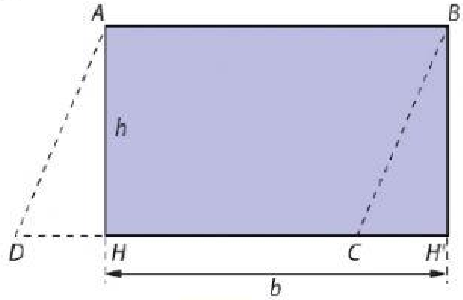
ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Área do paralelogramo

Vamos considerar um paralelogramo *ABCD* cuja base mede *b* e *a* altura, *h* como mostra a figura a seguir.

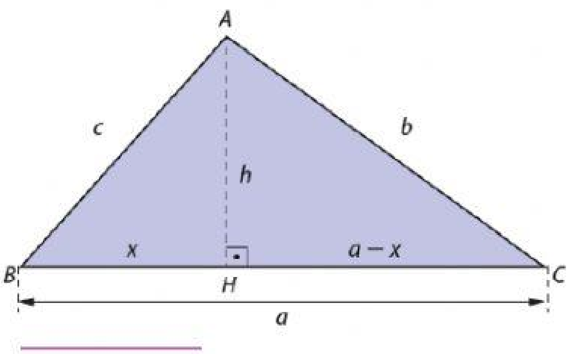


Projetando ortogonalmente os vértices *A* e *B* desse paralelogramo sobre a reta que passa pelos pontos *D* e *C*, obtemos os pontos *H* e *H'*, respectivamente, determinando o retângulo *ABH'H*, como indicado na figura ao lado. Os triângulos *AHD* e *BH'C* são congruentes pelo caso LAA_o (Lado, Ângulo, Ângulo Oposto). Desse modo, eles têm a mesma área.



Logo, a área *S* do paralelogramo *ABCD* é igual à área do retângulo *ABH'H*:

$$S = b \cdot h$$

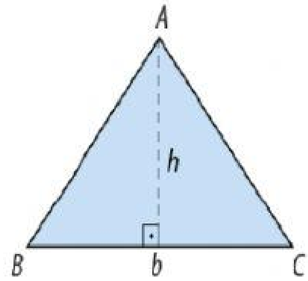


Outra maneira de calcular a área de um triângulo qualquer é a partir da medida de seus três lados.

Seja um triângulo *ABC* em que *a*, *b* e *c* são, respectivamente, as medidas dos lados $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$ e *h* é a medida da altura $\overline{AH}$ relativa ao lado $\overline{BC}$, como mostra a figura ao lado.

A área *S* do triângulo é dada por:

Área do triângulo



Vamos considerar um triângulo ABC cuja base $\overline{BC}$ mede b, e a altura relativa a essa base mede h.

A área S do triângulo ABC é igual à metade do produto da medida da base pela altura relativa a essa base.

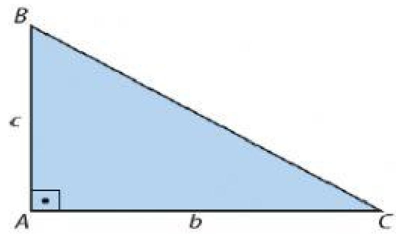
$$S = \frac{b \cdot h}{2}$$

$S = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}$, em que $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ é o semiperímetro do triângulo.

Essa expressão para o cálculo da área de um triângulo é conhecida como **fórmula de Heron**.

Área do triângulo retângulo

Em um triângulo retângulo ABC, o cateto $\overline{AB}$ é a altura relativa ao lado $\overline{AC}$ e vice-versa. Assim, sendo $AB = c$, $AC = b$ e S a área do triângulo retângulo ABC, temos:

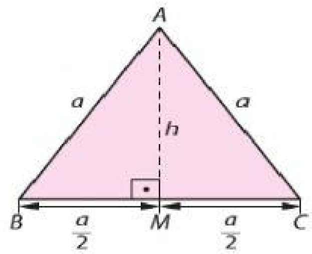


$$S = \frac{b \cdot c}{2}$$

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Área do triângulo equilátero

Em um triângulo equilátero, todos os lados são congruentes, todos os ângulos internos são congruentes e toda altura é também bissetriz e mediana. Vamos considerar um triângulo equilátero ABC como mostra a figura ao lado.



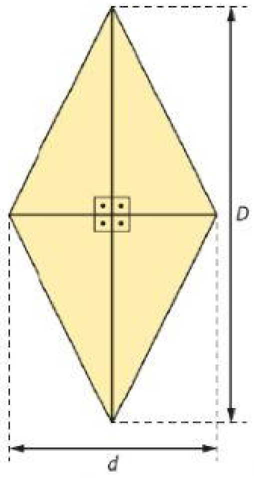
A área S do triângulo equilátero ABC é dada por:

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Área do losango

Todo losango é um paralelogramo cujas medidas dos lados são iguais e as diagonais são perpendiculares entre si.

Observe que o losango pode ser decomposto em quatro triângulos congruentes de mesma área. Assim, sua área S é a soma das áreas desses quatro triângulos:



$$S = 4 \cdot S\triangle = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{D}{2} \cdot \frac{d}{2} = \frac{(D \cdot d)}{2}$$

Então: $$S = \frac{D \cdot d}{2}$$

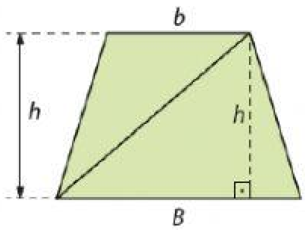
Portanto, a área de um losango é igual à metade do produto das medidas das diagonais.

Em um losango:

- os ângulos opostos são congruentes.
- as diagonais são bissetrizes dos ângulos internos.
- as diagonais se intersectam no ponto médio.

Área do trapézio

Vamos considerar um trapézio cujas base maior, base menor e altura medem B, b e h, respectivamente. Traçando uma diagonal nesse trapézio, obtemos dois triângulos: um de base B e altura h e outro de base b e altura h, como mostra a figura ao lado.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

A área S do trapézio é a soma das áreas desses dois triângulos:

$$S = \frac{B \cdot h}{2} + \frac{b \cdot h}{2} = \frac{B \cdot h + b \cdot h}{2} = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$

Então: $$S = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$

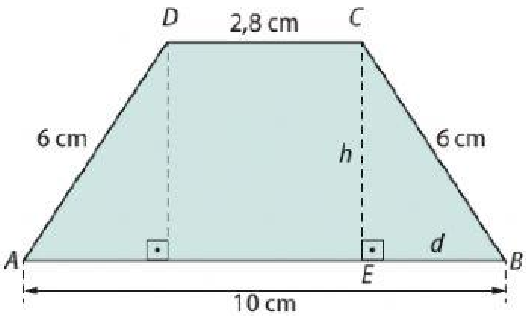
Portanto, a área de um trapézio é igual à metade do produto da soma das medidas das bases pela medida da altura.

Exemplos:

1. As bases de um trapézio medem, respectivamente, 10 cm e 2,8 cm. Se a medida de cada um dos outros dois lados é 6 cm, qual é a área desse trapézio?

Resolução

Como os lados não paralelos têm medidas iguais, o trapézio é isósceles.



Vamos calcular a medida d no triângulo CEB para determinar a altura do trapézio:

$$d = \frac{10 - 2{,}8}{2} = \frac{7{,}2}{2} \Rightarrow d = 3{,}6 \text{ cm}$$

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo CEB, temos:

$$h^2 + 3{,}6^2 = 6^2 \Rightarrow h^2 = 23{,}04$$

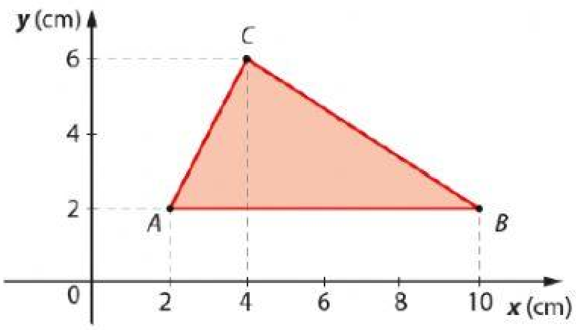
Logo, $h = 4{,}8$ cm.

Cálculo da área do trapézio:

$$S = \frac{(10 + 2{,}8) \cdot 4{,}8}{2} = \frac{(12{,}8 \cdot 4{,}8)}{2} = 30{,}72$$

Portanto, $S = 30{,}72 \text{ cm}^2$.

2. Calcule a área do triângulo ABC.



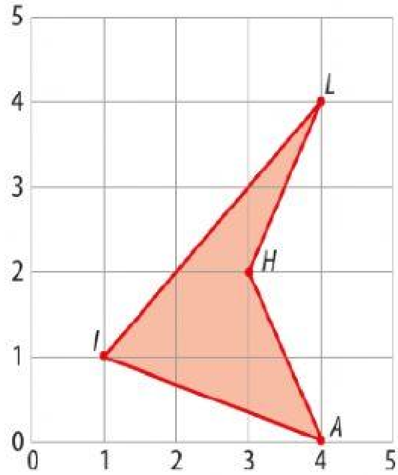
Resolução

A base do triângulo mede 8 cm ($10 - 2 = 8$), e a altura, 4 cm ($6 - 2 = 4$). Logo:

$$A = \frac{b \cdot h}{2} \Rightarrow A = \frac{8 \cdot 4}{2} = 16$$

Assim, a área do triângulo ABC é 16 cm².

3. Determine a área do quadrilátero *ILHA* representado a seguir.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Resolução

Inicialmente, observamos que o quadrilátero é não convexo.

Precisamos então, decompor a figura em polígonos cuja área sabemos calcular. Uma possibilidade é considerar os triângulos *ILA* e *LHA*.

A área do quadrilátero *ILHA* é a área do triângulo *ILA* menos a área do triângulo *LHA*.

No triângulo *ILA*, considerando a base como o lado $\overline{LA}$, a altura relativa a esse lado pode ser obtida com o auxílio da malha quadriculada e vale 3 u.c. (unidades de comprimento). Assim:

$A_{ILA} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6 \Rightarrow A_{ILA} = 6$ u.a. (unidades de área)

Usamos raciocínio análogo no $\triangle LHA$ e determinamos sua área:

$$A_{LHA} = \frac{4 \cdot 1}{2} = 2 \Rightarrow A_{LHA} = 2 \text{ u.a.}$$

De posse desses valores, conseguimos determinar a área do quadrilátero *ILHA*:

$A_{ILHA} = A_{ILA} - A_{LHA} = 6 - 2 = 4 \Rightarrow$

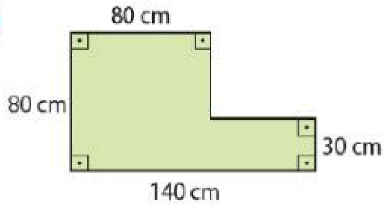
$\Rightarrow A_{ILHA} = 4$ u.a.

Portanto, a área do quadrilátero *ILHA* é 4 unidades de área.

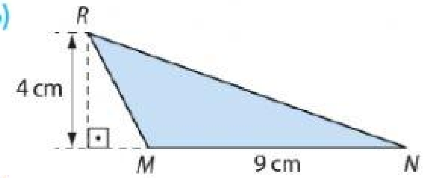
Exercícios:

1. Calcule a área das figuras a seguir.

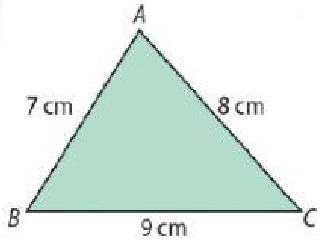
a)



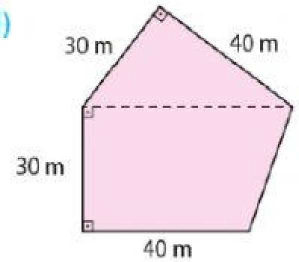
b)



c)



d)



2. Uma parede retangular tem 2,4 m de comprimento por 90 cm de largura. Quantos azulejos quadrados de lado medindo 45 cm são necessários, no mínimo, para cobrir essa parede?

3. Se aumentarmos a medida do lado de um quadrado em 4 cm, sua área será aumentada em 56 cm². Qual é a medida da diagonal do quadrado inicial?

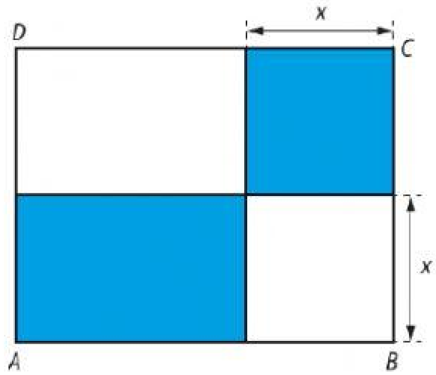
4. O que ocorre com a área de um quadrado se aumentarmos em 20% a medida de seu lado?

5. (Vunesp-SP) Uma parede de 350 cm de altura e 500 cm de comprimento será revestida de azulejos quadrados iguais. Desprezando-se a necessidade de deixar espaço entre os azulejos e supondo-se que não haverá perdas provenientes do corte deles:

a) determine o número de azulejos de 20 cm de lado necessários para revestir a parede;

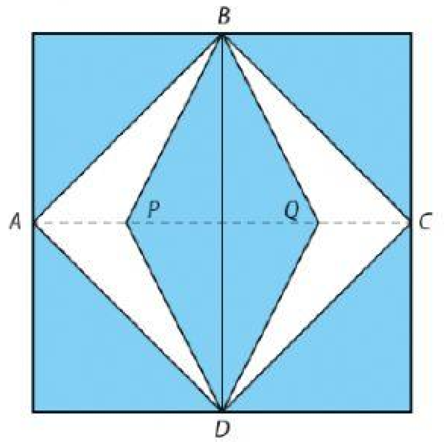
b) encontre a maior dimensão de cada peça de azulejo para que não haja necessidade de cortar nenhum deles.

6. Considere o retângulo *ABCD* a seguir.



Sabendo que $AB = 27$ cm e $AD = 21$ cm, calcule o valor de x de modo que a soma das áreas dos retângulos em azul seja a maior possível.

7. (Enem/MEC) Para decorar a fachada de um edifício, um arquiteto projetou a colocação de vitrais compostos de quadrados de lado medindo 1 m, conforme a figura a seguir.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Nesta figura, os pontos *A*, *B*, *C* e *D* são pontos médios dos lados do quadrado e os segmentos $\overline{AP}$ e $\overline{QC}$ medem $\frac{1}{4}$ da medida do lado do quadrado. Para confeccionar um vitral, são usados dois tipos de materiais: um para a parte sombreada da figura, que custa R$ 30,00 o m², e outro para a parte mais clara (regiões *ABPDA* e *BCDQB*), que custa R$ 50,00 o m².
De acordo com esses dados, qual é o custo dos materiais usados na fabricação de um vitral?

a) R$ 22,50

b) R$ 35,00

c) R$ 40,00

d) R$ 42,50

e) R$ 45,00