

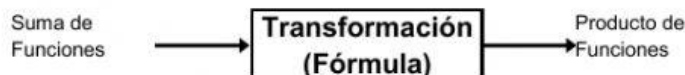
MATEMÁTICA V SECUNDARIA

Ficha 10: Transformaciones trigonométricas I (de una suma o diferencia a producto)

En ocasiones se nos presentan ejercicios en las que se nos pide reducir o simplificar. por ejemplo: $E = (\text{Sen}40^\circ + \text{Sen}20^\circ) \text{Sec}10^\circ$

Observamos quizás la necesidad de pasar $\underbrace{\text{Sen}(40^\circ + \text{Sen}20^\circ)}_{\text{Suma de Funciones}}$ a un producto de funciones

debe decir:



Esto puede lograrse mediante el uso **correcto** de las siguientes identidades:

I. $\text{Sen}A + \text{Sen}B = 2\text{Sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\text{Cos}\left(\frac{A-B}{2}\right)$

II. $\text{Sen}A - \text{Sen}B = 2\text{Sen}\left(\frac{A-B}{2}\right)\text{Cos}\left(\frac{A+B}{2}\right)$

III. $\text{Cos}A + \text{Cos}B = 2\text{Cos}\left(\frac{A+B}{2}\right)\text{Cos}\left(\frac{A-B}{2}\right)$

IV. $\text{Cos}A - \text{Cos}B = -2\text{Sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\text{Sen}\left(\frac{A-B}{2}\right)$

Para **demostrar** la primera identidad recordamos:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Sen}(\alpha + \beta) = \text{Sen}\alpha\text{Cos}\beta + \text{Cos}\alpha\text{Sen}\beta \\ \text{Sen}(\alpha - \beta) = \text{Sen}\alpha\text{Cos}\beta - \text{Cos}\alpha\text{Sen}\beta \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Sumando} \\ \text{miembro a miembro} \end{array}$$

Se obtiene:

$$\text{Sen}(\alpha + \beta) + \text{Sen}(\alpha - \beta) = 2\text{Sen}\alpha\text{Cos}\beta \dots\dots\dots (*)$$

Hacemos un cambio de variable:

$$\alpha + \beta = A$$

$$\alpha - \beta = B$$

Obtenemos:

$$\alpha = \frac{A+B}{2} \wedge \beta = \frac{A-B}{2}$$



Reemplazamos en (*) se tiene:

$$\text{Sen}A + \text{Sen}B = 2\text{Sen}\left(\frac{A+B}{2}\right) \text{Cos}\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

Los demás se demuestran en forma análoga.

Entonces en nuestro ejemplo:

$$\underbrace{(\text{Sen}40^\circ + \text{Sen}20^\circ)}_{\text{Usamos la identidad}} \text{Sec}10^\circ$$

Usamos la identidad

$$2\text{Sen}\left(\frac{40^\circ + 20^\circ}{2}\right) \text{Cos}\left(\frac{40^\circ - 20^\circ}{2}\right) \text{Sec}10^\circ$$

$$\underbrace{2 \text{ Sen}30^\circ}_{\downarrow} \underbrace{\text{Cos}10^\circ \text{Sec}10^\circ}_{\text{Por identidad recíproca}}$$

$$2\left(\frac{1}{2}\right) \cdot 1$$

$$\boxed{E = 1}$$

Practicando en clase

1. Reduce: $E = \text{Sen}70^\circ + \text{Sen}20^\circ$

a) $\sqrt{2}$

b) $\sqrt{2} \text{ Sen}25^\circ$

c) $\sqrt{2} \text{ Cos}25^\circ$

d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

e) $-\sqrt{2}$

2. Reduce:

$$E = (\text{Cos}70^\circ + \text{Cos}50^\circ) \text{Sec}10^\circ$$

a) 1

b) $\frac{1}{2}$

c) 2

d) $\frac{3}{2}$

e) $\frac{1}{3}$

3. Reduce:

$$E = (\text{Sen}70^\circ + \text{Cos}70^\circ) \text{Sec}25^\circ$$

a) 1

b) $\sqrt{2}$

c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $\frac{1}{2}$

e) 2



4. Simplifica:

$$E = \frac{\text{Sen}40^\circ - \text{Sen}20^\circ}{\text{Cos}80^\circ}$$

a) 1

b) 2

c) $\sqrt{3}$

d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

e) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

5. Simplifica:

$$E = \frac{\text{Sen}7x + \text{Sen}3x}{\text{Cos}7x + \text{Cos}3x}$$

a) Tgx

b) $\text{Tg}2x$

c) $\text{Tg}3x$

d) $\text{Tg}4x$

e) $\text{Tg}5x$

6. Simplifica:

$$E = \frac{\text{Sen}3x - \text{Sen}x}{\text{Cos}3x + \text{Cos}x}$$

a) Tgx

b) $\text{Ctg}x$

c) $\text{Tg}2x$

d) $\text{Ctg}2x$

e) 2

7. Simplifica:

$$E = \frac{\text{Cos}x - \text{Cos}3x}{\text{Sen}2x}$$

a) $\text{Sen}x$

b) $-\text{Sen}x$

c) $2\text{Sen}x$

d) $-2\text{Sen}x$

e) $\text{Cos}2x$

8. Reduce:

$$E = \frac{\text{Sen}70^\circ + \text{Sen}10^\circ}{\text{Cos}10^\circ - \text{Cos}70^\circ}$$

a) $\sqrt{3}$

b) $-\sqrt{3}$

c) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

d) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

9. Simplifica:

$$E = \frac{\text{Cos}100^\circ + \text{Cos}20^\circ + \text{Cos}40^\circ}{\text{Cos}50^\circ + \text{Cos}30^\circ}$$

a) $\text{Sen}10^\circ$

b) $\text{Cos}10^\circ$

c) $\text{Csc}10^\circ$

d) $\text{Sec}10^\circ$

e) $\text{Ctg}10^\circ$



10. Calcula:

$$E = \cos 20^\circ + \cos 100^\circ + \cos 140^\circ$$

- a) 0 b) 1 c) $\sin 10^\circ$
d) $\cos 10^\circ$ e) -1

11. Simplifica:

$$E = \frac{\sin x + \sin 3x + \sin 5x}{\cos x + \cos 3x + \cos 5x}$$

- a) $\tan x$ b) $\tan 2x$ c) $\tan 3x$
d) $\tan 4x$ e) $\tan 5x$

12. Reduce:

$$E = \frac{\sin 2x + \sin 4x + \sin 6x}{\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x}$$

- a) $\tan 2x$ b) $\tan 3x$ c) $\tan 4x$
d) $\tan 5x$ e) $\tan 6x$

13. Reduce:

$$E = \frac{\sin 4x + \sin 2x}{\sin 3x \cos x}$$

- a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

14. Reduce:

$$\frac{\sin 40^\circ + \sin 20^\circ}{\cos 10^\circ}$$

- a) 1 b) $\frac{1}{2}$ c) 2
d) $2\sin 10^\circ$ e) $\cos 10^\circ$

15. Reduce:

$$E = \frac{\sin 5x - \sin 3x}{2\cos 4x \cos x}$$

- a) 1 b) 2 c) $\sin x$
d) $\tan x$ e) $\cot x$



16. Reduce:

$$E = \frac{\text{Sen}17^\circ - \text{Sen}3^\circ}{2\text{Sen}7^\circ\text{Sen}10^\circ}$$

a) 1

d) $\text{Ctg}10^\circ$

b) 2

e) $\text{Tg}3^\circ$

c) $\text{Tg}10^\circ$