MATEMÁTICA
V SECUNDARIA
Ficha 7: Razones trigonométricas de ángulos en posición normal

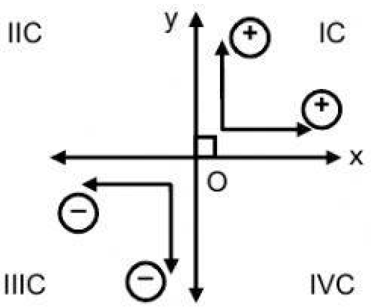
UN POCO DE HISTORIA

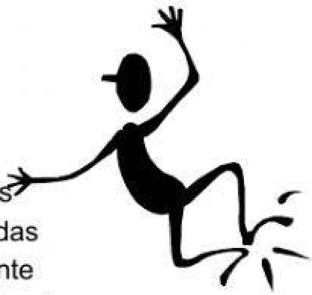
Fue Renato Descartes (1 596 – 1 650) quien, al publicar en 1 637 su obra **La Géometrie**, puso los cimientos de la Geometría Analítica. Es por ello que a veces, en memoria de su fundador, la denominan **Geometría Cartesiana** que en resumidos cuentos vendría a ser el estudio de la geometría mediante un sistema de coordenadas que lleva asociada un álgebra.

La **Trigonometría**, se desarrolló en conexión con el estudio de las relaciones entre los lados y los ángulos de un triángulo. Este tema está dedicado a aquellas partes de la trigonometría que se relacionan con la geometría del plano cartesiano. No obstante, cometeríamos un **grave error** limitando el estudio de la trigonometría a su aplicación a triángulos. Sus aplicaciones son más extensas en muchos campos teóricos y prácticos como por ejemplo, en las ondas; vibraciones; corrientes alternas; los sonidos; etc.

NOCIONES PREVIAS

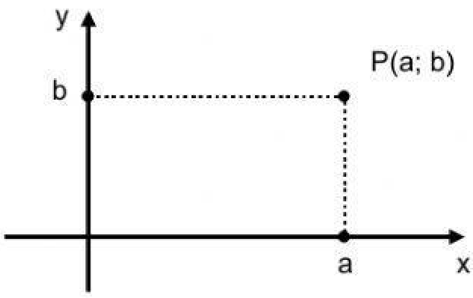
SISTEMAS DE COORDENADAS RECTANGULARES



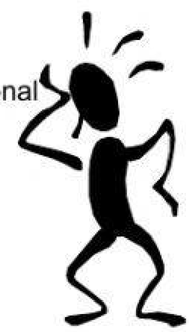


Donde:
x : Eje de Abscisas
y : Eje de Ordenadas
IC : Primer Cuadrante
IIC : Segundo Cuadrante
IIIC : Tercer Cuadrante
IVC : Cuarto Cuadrante
O : Origen del Sistema

Ubicación de un punto

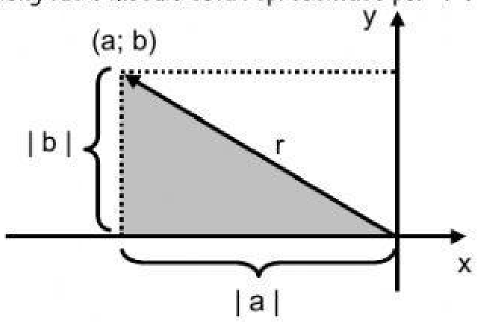


Donde:
P : Punto del Sistema Bidimensional
a : Abscisa del Punto P
b : Ordenada del Punto P
(a; b): Coordenadas del Punto P



Radio vector

Es el segmento de recta dirigido **(flecha)** que parte del origen hacia un punto cualquier del sistema; su longitud o módulo está representado por "**r**".



Donde: r: Longitud del Radio Vector

$$r^2 = a^2 + b^2$$

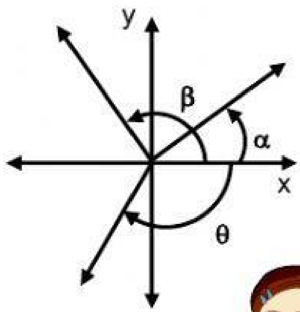
¡Importante!
¡Recordar!

$r \to \oplus$

$|a|^2 = a^2$

Ángulo en posición normal

Es aquel Ángulo Trigonométrico cuyo vértice coincide con el origen del sistema bidimensional y su lado inicial descansa en el semieje positivo de las abscisas, mientras que su lado final puede encontrarse en cualquiera de los cuadrantes o coincidir con algún semieje en cuyo caso es llamado ángulo cuadrantal.



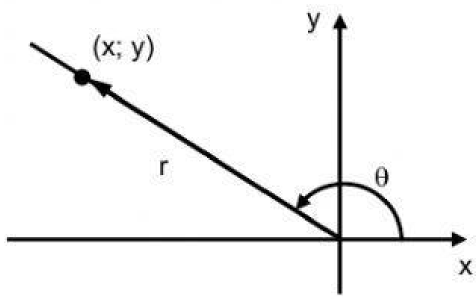
Donde:
α, $\beta \wedge \theta$ son las medidas de los ángulos en posición normal mostrados.

L.I.: Lado Inicial
L.F.: Lado Final

¡Recordar!

También son llamados ∢s en posición canónica o estándar.

Del siguiente gráfico definiremos las Razones Trigonométricas para un ángulo en posición normal los cuales son **independientes** del sentido de giro o el número de vueltas que pudiera realizar.

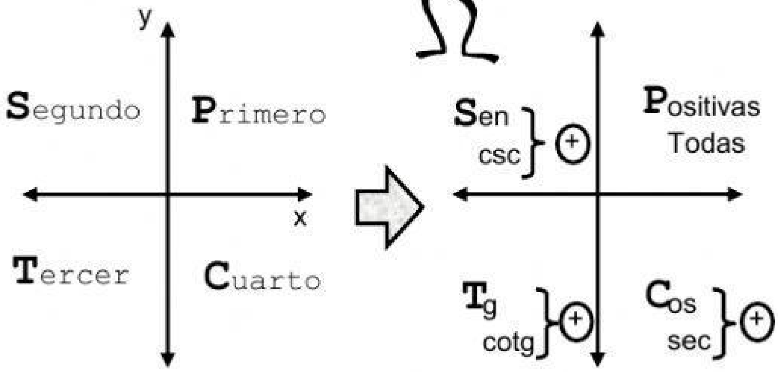


$\text{sen}\theta = \dfrac{\text{Ordenada}}{\text{M.R.V.}} = \dfrac{y}{r}$	$\csc\theta = \dfrac{\text{M.T.V.}}{\text{Ordenada}} = \dfrac{r}{y}$
$\cos\theta = \dfrac{\text{Abscisa}}{\text{M.R.V.}} = \dfrac{x}{r}$	$\sec\theta = \dfrac{\text{M.R.V.}}{\text{Abscisa}} = \dfrac{r}{x}$
$\text{tg}\theta = \dfrac{\text{Ordenada}}{\text{Abscisa}} = \dfrac{y}{x}$	$\cot\theta = \dfrac{\text{Abscisa}}{\text{Ordenada}} = \dfrac{x}{y}$

REGLA DE SIGNOS

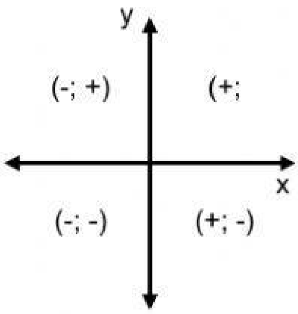
C / R.T.	IC	IIC	IIIC	IVC
sen	+	+	-	-
cos	+	-	-	+
tg	+	-	+	-
cot	+	-	+	-
sec	+	-	-	+
csc	+	+	-	-

Para recordar



comprobación

Utilizamos el siguiente gráfico para un ángulo en posición normal de medida "θ".



IC. x; y ∧ r son positivos entonces todas las divisiones son positivas.

IIC. $sen\theta = \frac{y}{r} = \frac{\oplus}{\oplus} = \oplus \Rightarrow \cos\theta = \oplus$

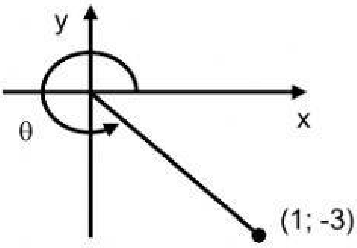
IIIC. $tg\theta = \frac{y}{x} = \frac{\ominus}{\ominus} = \oplus \Rightarrow \cot\theta = \oplus$

IVC. $\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{\oplus}{\oplus} = \oplus \Rightarrow \sec\theta = \oplus$

Ejemplo 1

Del siguiente gráfico calcula:

$E = \sqrt{10}sen\theta - 12\cot\theta$



Solución 1

a) Con el par ordenado del dato calculamos "r":

$r^2 = r^2 + (-3)^2 \Rightarrow r = \sqrt{10}$

b) Reemplazamos las definiciones:

$$E = \sqrt{10} \cdot \left(\frac{-3}{\sqrt{10}}\right) - 12\left(\frac{1}{-3}\right)$$

$E = -3 + 4 \Rightarrow E = 1$

Ejemplo 2

Indicar el signo resultante de la siguiente operación:

$E = sen130°. \cos230°. tg330°$

Solución 2

$$E = sen\overbrace{130°}^{IIC}.\ \cos\overbrace{230°}^{IIIC}.\ tg\overbrace{330°}^{IVC}$$

$E = \oplus . \ominus . \ominus \Rightarrow E = \oplus$

Ejemplo 3

Indicar el cuadrante al que pertenece la medida angular "θ" si:

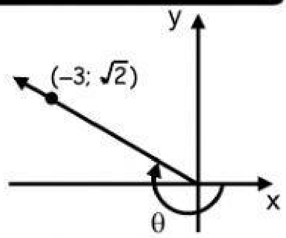
$tg\theta < 0 \quad \wedge \quad csc\theta > 0$

Solución 3

$$\left.\begin{array}{l} tg\theta = \ominus \ \{ IIC \ \wedge \ IVC \} \\ csc\theta = \oplus \ \{ IC \ \wedge \ IIC \} \end{array}\right\} \theta \in IIC$$

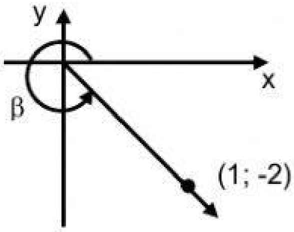
EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1. Del gráfico calcula: $E = \sqrt{11}\cos\theta - 6\sqrt{2}\,tg\theta$



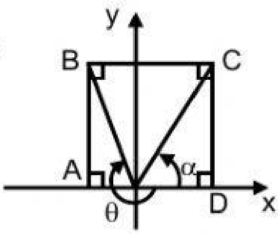
a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

2. Del gráfico calcula: $E = \sqrt{5}\sec\beta + 4\cot\beta$



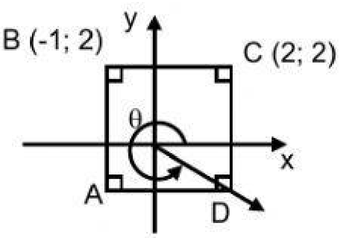
a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

3. Del gráfico calcula: E = cotα - cotθ
Si: ABCD es un cuadrado



a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

4. Del gráfico calcula "tgθ"
Si: ABCD es un cuadrado



a) -0,1
b) -0,2
c) -0,3
d) -0,4
e) -0,5

5. Por el punto $P(-2;\sqrt{5})$ pasa el lado final de un ángulo en posición normal cuya medida es "θ". Calcula: "sec θ"

a) -1/2 b) -2/3 c) -3/4
d) -4/3 e) -3/2

6. Por el punto $Q(-\sqrt{2};-\sqrt{7})$ pasa el lado final de un ángulo en posición canónica cuya medida es "α". Calcula: "$\sqrt{7}\csc\alpha$".

a) 1 b) 2 c) 3
d) -3 e) -2

7. Si: $sen\alpha=-\frac{2}{3} \wedge \alpha \in IIIC$ Calcula: $E=\sqrt{5}(tg\alpha+sec\alpha)$

a) -1 b) -2 c) -3
d) 2 e) 3

8. Si: $\cot\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2} \wedge \theta \in IVC$ Calcula: $E=\sqrt{21}\sec\theta+\sqrt{7}sen\theta$

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

9. Indica el signo de cada expresión:

I. sen100° cos200°
II. tg190° cot320°
III. sec200° csc350°

a) +, +, + b) -, -, - c) +, +, -
d) -, -, + e) +, -, -

10. Indica el signo de cada expresión:

I. sen200° tg200°
II. cos100° cot100°
III. sen100° cos300°

a) +, +, + b) -, -, - c) -, +, +
d) +, -, - e) +, -, +
a) IC b) IIC c) IIIC
d) IVC e) IC $\wedge$ IIC

11. A que cuadrante pertenece ϕ si:

senϕ < 0 $\wedge$ secϕ < 0

a) IC b) IIC c) IIIC
d) IVC e) IIC $\wedge$ IIIC

12. Del gráfico calcula: $E = 3\sec^2\theta - tg\theta$

a) 20
b) 21
c) 22
d) 23
e) 24