

LKPD

BAB III TURUNAN

Nama: _____

Kelas : _____

No : _____

Kompetensi Dasar

- 3.8 Menjelaskan sifat-sifat turunan fungsi aljabar dan menentukan turunan fungsi aljabar menggunakan definisi atau sifat-sifat turunan fungsi.
- 4.8 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan turunan fungsi aljabar.

Tujuan Pembelajaran:

- Siswa mampu menjelaskan sifat-sifat turunan fungsi aljabar
- Siswa mampu menentukan turunan fungsi aljabar menggunakan definisi dan sifat-sifat turunan fungsi
- Siswa mampu menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan turunan fungsi aljabar

Kegiatan Pembelajaran: (Pertemuan 1)

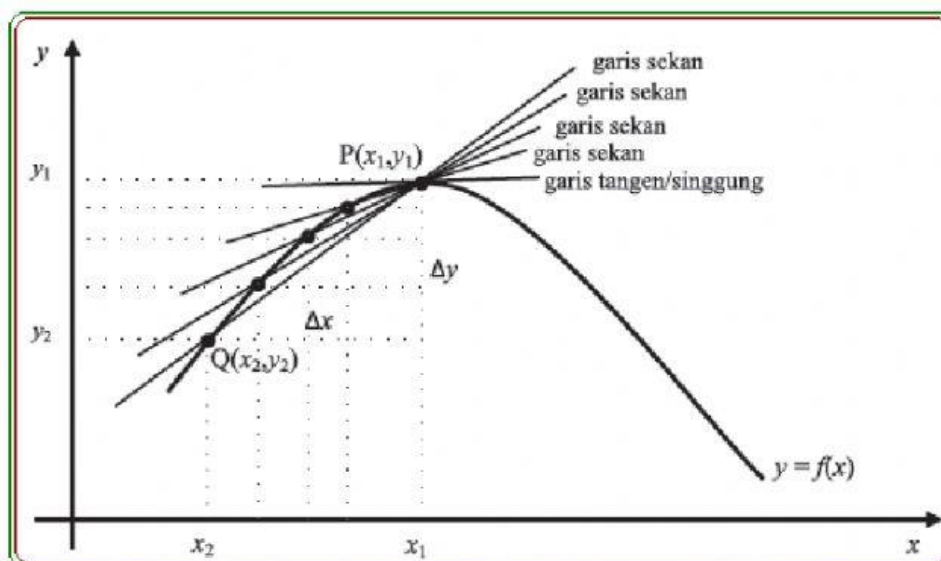
Materi Pokok: Definisi dan Sifat-Sifat Turunan Fungsi Aljabar

A. DEFINISI TURUNAN FUNGSI

Pada fungsi $y = f(x)$, turunan dari variabel y terhadap variabel x dinotasikan dengan $\frac{dy}{dx}$ atau $\frac{df(x)}{dx}$ atau y' atau $f'(x)$ dan didefinisikan sebagai:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \text{ dengan } h \text{ adalah jarak dari nilai-nilai } x.$$

Perhatikan gambar berikut



Gradien garis sekan PQ adalah

$$\begin{aligned} m_{PQ} &= \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \end{aligned}$$

Jika h diperkecil hingga mendekati 0, yang awalnya merupakan garis sekan (karena memotong di dua titik), kedua titik itu perlahan akan mendekat hingga mendekati satu titik yang disebutlah garis singgung.

$$m_{PGS} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Berdasarkan hal tersebut, diperoleh kesimpulan bahwa gradien garis singgung akan sama dengan turunan fungsi di suatu titik tertentu.

B. LATIHAN SOAL MENENTUKAN TURUNAN DENGAN DEFINISI

1. Tentukan persamaan garis singgung di titik $x=3$ pada kurva $f(x) = x^2 - 4$

Pembahasan:

- $x_1 = 3$, sehingga perlu dicari nilai dari y_1

Substitusi $x_1 = 3$ ke $f(x) = x^2 - 4$

$$\begin{aligned} f(3) &= 3^2 - 4 \\ &= 5 \end{aligned}$$

Diperoleh $(x_1, y_1) = (3, 5)$

- Mencari gradien dari garis singgung

Gradien garis singgung = Turunan fungsi pada titik $x_1 = 3$

$$\begin{aligned} m &= f'(x) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - 4 - (x^2 - 4)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - 4 - x^2 + 4}{h} \end{aligned}$$

Substitusikan setiap nilai x yang ada pada $f(x)$ dengan $(x+h)$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h}$$

Sederhanakan dengan mencoret h pada pembilang dan penyebut

$$= \lim_{h \rightarrow 0} 2x + h$$

$$= 2x + 0$$

$$= 2x$$

Karena diketahui $x_1 = 3$, maka $m = 2(3) = 6$

- Persamaan garis singgung

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 5 = 6(x - 3)$$

$$y - 5 = 6x - 18$$

$$y = 6x - 18 + 5$$

$$y = 6x - 13$$

2. Tentukan turunan dari $f(x) = 2x^2$ dengan menggunakan definisi

Pembahasan:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(x+h)^2 - 2x^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(x^2 + 2xh + h^2) - 2x^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2x^2 + 4xh + 2h^2 - 2x^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4xh + 2h^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 4x + h \\ &= 4x + 0 \\ &= 4x \end{aligned}$$

C. SIFAT-SIFAT TURUNAN FUNGSI

Dengan menggunakan definisi turunan fungsi, diperoleh beberapa sifat turunan fungsi yaitu sebagai berikut.

1. $f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$
2. $f(x) = ax \rightarrow f'(x) = x$
3. $f(x) = a \rightarrow f'(x) = 0$
4. $f(x) = u + v \rightarrow f'(x) = u' + v'$
5. $f(x) = u - v \rightarrow f'(x) = u' - v'$
6. $f(x) = u \cdot v \rightarrow f'(x) = u'v + uv'$
7. $f(x) = \frac{u}{v} \rightarrow f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

D. LATIHAN SOAL SIFAT-SIFAT TURUNAN FUNGSI

1. Tentukan turunan dari $y = 4x^2$

Pembahasan:

$$\begin{aligned} y' &= 2 \cdot 4x^{2-1} \\ &= 8x^1 \\ &= 8x \end{aligned}$$

Pangkat dikali dengan koefisien x,
kemudian pangkat dikurangi dengan 1

2. Tentukan turunan dari $y = x^3 - 3x^2 + 5$

Pembahasan:

$$\begin{aligned} y' &= 3x^{3-1} - 2 \cdot 3x^{2-1} + 0 \\ &= 3x^2 - 2x^1 \\ &= 3x^2 - 2x \end{aligned}$$

3. Tentukan turunan dari $y = \frac{1}{2}x^2 + 5x + 1$

Pembahasan:

$$\begin{aligned}y' &= 2 \cdot \frac{1}{2}x^{2-1} + 5 + 0 \\&= x^1 + 5 \\&= x + 5\end{aligned}$$

4. Tentukan turunan dari $y = (3x+2)^5$

Pembahasan:

$$\begin{aligned}y' &= 5(3x+2)^{5-1} \cdot (3) \\&= 15(3x+2)^4\end{aligned}$$

Penerapan aturan rantai.

Pangkat dikalikan kedepan, $(3x+2)$ ditulis seperti biasa, lalu pangkat dikurangi 1. Dikali dengan turunan dari $(3x+2)$

5. Tentukan turunan dari $y = (2x-1)^3 + (x^2-5x+5)^4$

Pembahasan:

$$\begin{aligned}y' &= 3(2x-1)^{3-1} \cdot (2) + 4(x^2-5x+5)^{4-1} \cdot (2x-5) \\&= 6(2x-1)^2 + 4(2x-5)(x^2-5x+5)^3 \\&= 6(2x-1)^2 + (8x-10)(x^2-5x+5)^3\end{aligned}$$

6. Tentukan turunan dari $y = (x+2)^3(3x^2-5)$

Pembahasan:

$$\begin{aligned}u &= (x+2)^3 \\u' &= 3(x+2)^{3-1} \cdot (1) \\u' &= 3(x+2)^2\end{aligned}$$

Tentukan u dan v terlebih dahulu
Kemudian cari u' dan v'
Substitusi sesuai sifat-sifat turunan

$$\begin{aligned}v &= 3x^2 - 5 \\v' &= 2 \cdot 3x^{2-1} - 0 \\v' &= 6x^1 \\v' &= 6x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y' &= u'v + uv' \\&= (3(x+2)^2)(3x^2-5) + (x+2)^3(6x) \\&= 3(3x^2-5)(x+2)^2 + (6x)(x+2)^3 \\&= (9x^2-15)(x+2)^2 + (6x)(x+2)^3\end{aligned}$$

7. Tentukan turunan dari $y = \frac{2x+1}{x-5}$

Pembahasan:

$$\begin{aligned}u &= 2x+1 \\u' &= 2\end{aligned}$$

Tentukan u dan v terlebih dahulu
Kemudian cari u' dan v'
Substitusi sesuai sifat-sifat turunan

$$v = x - 5$$

$$v' = 1$$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{u'v - uv'}{v^2} \\ &= \frac{(2)(x-5) - (2x+1)(1)}{(x-5)^2} \\ &= \frac{2x-10-2x-1}{(x-5)^2} \\ &= \frac{-11}{(x-5)^2} \end{aligned}$$

8. Tentukan turunan dari $y = \frac{12}{x^4}$

Pembahasan:

$$\begin{aligned} y &= 12x^{-4} \\ y' &= -4 \cdot 12x^{-4-1} \\ &= -48x^{-5} \\ &= \frac{-48}{x^5} \end{aligned}$$

Supaya lebih mudah dalam pengerjaan, x^4 yang ada di penyebut dibawa ke pembilang sehingga pangkatnya menjadi negatif.
Diperoleh $y = 12x^{-4}$

9. Tentukan turunan dari $y = 8x\sqrt{x}$

Pembahasan:

$$\begin{aligned} y &= 8x^1 \cdot x^{\frac{1}{2}} \\ y &= 8x^{1+\frac{1}{2}} \\ y &= 8x^{\frac{3}{2}} \\ y' &= \frac{3}{2} \cdot 8x^{\frac{3}{2}-1} \\ &= 12x^{\frac{1}{2}} \\ &= 12\sqrt{x} \end{aligned}$$

Supaya lebih mudah dalam pengerjaan, $\sqrt{x}$ diubah terlebih dahulu menjadi $x^{\frac{1}{2}}$.
Kemudian sesuai dengan sifat eksponen, ketika basisnya sama, pangkat bisa dijumlahkan.

TURUNAN

SOAL

1. Tentukan turunan pertama dari $f(x) = 3x^4 + 5x$

Jawab:

$$f'(x) = \dots x^{\dots} + \dots$$

2. Tentukan turunan pertama dari $f(x) = \frac{1}{2}x^3 + 2x^2 - 5x + 1$

Jawab:

$$f'(x) = \frac{\dots}{\dots} x^{\dots} + \dots x - \dots$$

3. Tentukan turunan pertama dari $f(x) = \frac{5}{x^3} + 3x^2$

Jawab:

$$f(x) = 5x^{\dots} + 3x^2$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \dots x^{\dots} + \dots x \\ &= -\frac{\dots}{x^{\dots}} + \dots x \end{aligned}$$

4. Tentukan turunan pertama dari $f(x) = (2x + 1)^3$

Jawab:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3(2x + 1)^{\dots} \cdot (\dots) \\ &= \dots (2x + 1)^{\dots} \end{aligned}$$

5. Tentukan turunan pertama dari $f(x) = 2x^3 + (5x^2 + 3x - 3)^4$

Jawab:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \dots x^{\dots} + 4(5x^2 + 3x - 3)^{\dots} \cdot (\dots x + \dots) \\ &= \dots x^{\dots} + 4(\dots x + \dots) \cdot (5x^2 + 3x - 3)^{\dots} \\ &= \dots x^{\dots} + (\dots x + \dots) \cdot (5x^2 + 3x - 3)^{\dots} \end{aligned}$$