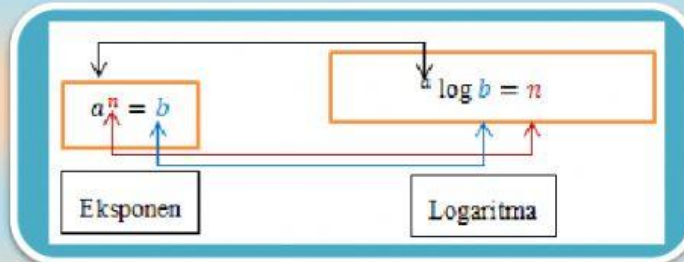


LOGARITMA

Logaritma adalah kebalikan atau invers dari suatu eksponen, dimana eksponen sendiri adalah suatu bentuk perkalian dengan bilang yang sama kemudian di ulang-ulang atau yang kenal dengan bilangan berpangkat. Bentuk umum dari eksponen adalah $a^n = b$, karena logaritma invers dari eksponen maka dapat dinyatakan sebagai berikut:



Dengan syarat $a \neq 1$, $a > 0$ dan $b > 0$, serta ${}^a \log b$ dapat dibaca “logaritma b dengan bilangan pokok a ”.

Contoh:



Sifat-sifat Logaritma:

A. Logaritma dari perpangkatan

Untuk $a \neq 1$, $a > 0$ dan $b > 0$

1. ${}^a \log a^n = n$, itu karena ${}^a \log a = 1$

Contoh:

Tentukan ${}^6 \log 6$.

Pembahasan:

$${}^6 \log 6 = 1 \leftrightarrow 6^1 = 6$$

2. ${}^a \log 1 = 0$

Contoh:

Tentukan nilai n dari $^{25}\log n = 0$

Pembahasan:

$$^{25}\log n = 0 \leftrightarrow 25^0 = 1$$

$$3. \quad a^n \log b = \frac{1}{n} \quad a \log b$$

Contoh:

Tentukan $^{27}\log 3$.

Pembahasan:

$$\begin{aligned} ^{27}\log 3 &= ^{3^3}\log 3 \\ &= \frac{1}{3} \quad ^3\log 3 \\ &= \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$4. \quad a^n \log b^m = \frac{m}{n} \quad a \log b$$

Contoh:

Tentukan $^4\log 8$.

Pembahasan:

$$\begin{aligned} ^4\log 8 &= ^{2^2}\log 2^3 \\ &= \frac{3}{2} \quad ^2\log 2 \\ &= \frac{3}{2} \cdot 1 = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

B. Logaritma dengan perkalian

Dengan $a \neq 1$, $a > 0$ dan $b > 0$ serta $c > 0$

$$5. \quad a \log(b \cdot c) = a \log b + a \log c$$

Contoh:

Tentukan $^3\log 15$.

Pembahasan:

$$\begin{aligned} ^3\log 15 &= ^3\log 3 \cdot 5 \\ &= ^3\log 3 + ^3\log 5 \\ &= 1 + ^3\log 5 \end{aligned}$$

C. Logaritma dengan pembagian

Dengan $a \neq 1$, $a > 0$ dan $b > 0$ serta $c > 0$

$$6. \quad a \log \frac{b}{c} = a \log b - a \log c$$

Contoh:

Tentukan ${}^5\log \frac{125}{5}$.

Pembahasan:

$$\begin{aligned} {}^5\log \frac{125}{5} &= {}^5\log 125 - {}^5\log 5 \\ &= {}^5\log 5^3 - {}^5\log 5 \\ &= 3 \cdot {}^5\log 5 - {}^5\log 5 \\ &= 3 - 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

D. Mengubah basis logaritma

7. ${}^b\log c = \frac{{}^a\log c}{{}^a\log b}$ dengan $a \neq 1$, $a > 0$, $b \neq 1$, $b > 0$, dan $c > 0$

Contoh:

Jika ${}^3\log 5 = a$ dan ${}^5\log 4 = b$, tentukan ${}^4\log 20$

Pembahasan:

$$\begin{aligned} {}^4\log 20 &= \frac{{}^5\log 20}{{}^5\log 4} = \frac{{}^5\log(5 \cdot 4)}{{}^5\log 4} \\ &= \frac{{}^5\log 5 + {}^5\log 4}{{}^5\log 4} = \frac{1 + {}^5\log 4}{{}^5\log 4} \\ &= \frac{1 + b}{b} \end{aligned}$$

8. ${}^c\log b = \frac{{}^a\log b}{{}^a\log c} = \frac{1}{\frac{{}^a\log c}{{}^a\log b}} = \frac{1}{{}^b\log c}$ dengan $a \neq 1$, $a > 0$, $b \neq 1$, $b > 0$, dan $c > 0$

Contoh:

Jika ${}^{25}\log 8 = a$, tentukan ${}^4\log 5$.

$$\begin{aligned} {}^{25}\log 8 &= a \quad \rightarrow \quad \frac{\log 8}{\log 25} = a \\ \frac{3 \log 2}{2 \log 5} &= a \quad \rightarrow \quad \frac{\log 2}{\log 5} = \frac{2a}{3} \\ \frac{\log 2}{\log 5} &= \frac{2a}{3} \quad \rightarrow \quad \frac{\log 5}{\log 2} = \frac{3}{2a} \\ {}^4\log 5 &= \frac{\log 5}{\log 4} \end{aligned}$$

$$= \frac{\log 5}{2 \log 2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2a} = \frac{3}{4a}$$

9. ${}^a \log b \cdot {}^b \log c = {}^a \log c$ dengan $a \neq 1, b \neq 1$, dan $a, b, c > 0$

Contoh:

Tentukan ${}^4 \log 6 \cdot {}^6 \log 16$.

Pembahasan:

$$\begin{aligned} {}^4 \log 6 \cdot {}^6 \log 16 &= {}^4 \log 16 \\ &= {}^4 \log 4^2 \\ &= 2 \cdot {}^4 \log 4 \\ &= 2 \end{aligned}$$

E. Perpangkatan dengan logaritma

Untuk $a \neq 1, a > 0$ dan $b > 0$

10. $a^{{}^a \log b} = b$

Contoh:

Tentukan $\sqrt{81}^{\sqrt{81}} \log 8$.

Pembahasan:

$$\sqrt{81}^{\sqrt{81}} \log 8 = 8$$

F. Sistem persamaan dengan Logaritma

Untuk $a \neq 1, a > 0, h(x) > 0$, dan $h(x) \neq 1$

11. Jika $p > 0$ dan ${}^a \log f(x) = {}^a \log p$, maka $f(x) = p$ asalkan $f(x) > 0$

Contoh:

Jika ${}^{27} \log 3^{6x} = 4$, maka nilai $x = \dots$.

Pembahasan:

$$\begin{aligned} {}^{27} \log 3^{6x} &= {}^{27} \log 27^4 \\ 3^{6x} &= (3^3)^4 \\ 3^{6x} &= 3^{12} \\ 6x &= 12 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

12. Jika ${}^a \log f(x) = {}^a \log g(x)$, maka $f(x) = g(x)$ asalkan $f(x) > 0, g(x) > 0$

Contoh:

Anggota himpunan penyelesaian dari persamaan ${}^2 \log(x^2 - 2x + 1) =$

${}^2 \log(2x^2 - 2)$ adalah

Pembahasan:

$$(1) \quad {}^2\log(x^2 - 2x + 1) = {}^2\log(2x^2 - 2)$$

$$x^2 - 2x + 1 = 2x^2 - 2$$

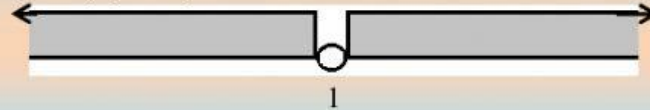
$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$(x + 3)(x - 1) = 0$$

$$x_1 = -3 \text{ atau } x_2 = 1$$

$$(2) \quad x^2 - 2x + 1 > 0$$

$$(x - 1)(x - 1) > 0$$

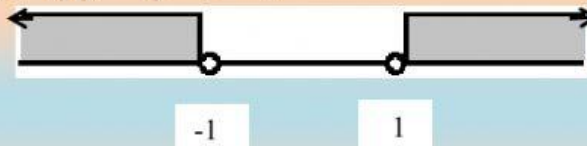


Sehingga syaratnya: $x > 1$ dan $x < 1$

$$(3) \quad 2x^2 - 2 > 0$$

$$2(x^2 - 1) > 0$$

$$2(x + 1)(x - 1) > 0$$



Sehingga syaratnya: $x > 1$ dan $x < -1$

Dari (1), (2), dan (3), nilai x yang merupakan penyelesaian adalah $x = -3$.

Karena apabila nilai x dari (1) disubstitusikan ke dalam (2) dan (3) yang hasil positif atau > 0 adalah -3

13. Jika ${}^{h(x)}\log f(x) = {}^{h(x)}\log g(x)$, maka $f(x) = g(x)$ asalkan $f(x) > 0$, $g(x) > 0$

Contoh:

$$\text{Selesaikan } {}^x\log(x + 1) = {}^{x^2}\log(5x - 1)$$

Pembahasan:

x muncul sebagai bilangan pokok logaritma maka $x \neq 1$ dan $x > 0$, sehingga dimisalkan bilangan pokok logaritma 2

$${}^x\log(x + 1) = {}^{x^2}\log(5x - 1)$$

$${}^x\log(x + 1) = \frac{1}{2} {}^x\log(5x - 1)$$

$${}^x\log(x + 1) = {}^x\log(5x - 1)^{1/2}$$

$$(x + 1) = (5x - 1)^{1/2}$$

$$(x + 1)^2 = (5x - 1)$$

$$x^2 + 2x + 1 = 5x - 1$$

$$x^2 + 2x + 1 - (5x - 1) = 0$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$(x - 2)(x - 1) = 0$$

$$x_1 = 2 \text{ atau } x_2 = 1$$

Dalam hal ini $x_2 = 1$ tidak memenuhi syarat, maka $x_1 = 2$ merupakan jawaban persamaan.

Jadi himpunan jawaban persamaan adalah $\{2\}$.

14. Jika $A\{ {}^a \log f(x) \}^2 + B\{ {}^a \log f(x) \}^2 + C = 0$, maka penyelesaian dapat ditentukan dengan mengubahnya menjadi persamaan kuadrat

Contoh:

Selesaikan persamaan $2(2^{\log^2 x}) + 9(2^{\log x}) + 4 = 0$

Pembahasan:

Dimisalkan $2^{\log x} = y$ dan $2^{\log^2 x} = y^2$, maka

$$y^2 - 9y + 4 = 0$$

$$\frac{(2y - 1)(2y - 8)}{2} = 0$$

$$(2y - 1)(y - 4) = 0$$

Maka $y_1 = \frac{1}{2}$ dan $y_2 = 4$, substitusikan nilai y ke dalam salah satu persamaan

$$y_1 = \frac{1}{2} \rightarrow 2^{\log x} = \frac{1}{2}$$

Maka nilai $x = 2^{\frac{1}{2}}$

$$y_2 = 4 \rightarrow 2^{\log x} = 4$$

Maka nilai $x = 2^4$

Jadi, himpunan penyelesaian persamaan adalah $\{2^{\frac{1}{2}}, 2^4\}$

Tugas Latihan

Kerjakanlah soal dibawah ini !

1. Penyelesaian dari $7^{3\log x} = 1$ adalah

a. 0
b. $\frac{1}{3}$
c. 1
e. 9

d. 3
2. Nilai dari ${}^3\log 6 + {}^3\log 9 - {}^3\log 2 = \dots$

a. 1
b. 2
c. 8
d. 3
e. 9
3. Diketahui ${}^2\log 3 = p$, maka ${}^4\log 27 = \dots$

a. $\frac{3}{2p}$
b. $\frac{3p}{2}$
c. $\frac{2}{3p}$
d. $\frac{2p}{3}$
e. $\frac{p}{3}$
4. Diketahui ${}^2\log 5 = p$, dan ${}^2\log 3 = q$, maka ${}^2\log 30$ dapat dinyatakan sebagai . .

a. $1 + pq$
d. pq

b. $1 + p + q$
e. $\frac{p}{q}$

c. $p + q$
5. Diketahui ${}^3\log 5 = m$, dan ${}^5\log 7 = n$, maka ${}^3\log 49$ dapat dinyatakan sebagai .

a. $\frac{1}{2}(m + n)$
d. $2mn$

b. $2(m + n)$
e. $2m + n$

c. $\frac{1}{2}ms$
6. Penyelesaian ${}^7\log(x + 1) + {}^7\log(x - 5) = 1$ adalah

a. $x = -2$
d. $x = -2$ atau $x = 6$

b. $x = 2$
e. $x = -6$ atau $x = 2$

c. $x = 6$
7. Nilai dari $\frac{1}{a}\log b^2 \cdot \frac{1}{b}\log c^2 \cdot \frac{1}{c}\log a^2$ adalah

a. 2
b. 0
c. -2
d. -4
e. -8
8. Diketahui ${}^5\log 3 = x$, maka $25^{5\log 3}$ adalah

a. 9
b. 3
c. 27
d. 1
e. 31
9. Carilah semua nilai x yang memenuhi persamaan

$${}^2\log x + {}^2\log(x + 1) = {}^2\log 12$$
 adalah

a. -1
b. 0
c. 1
d. 3
e. 12
10. Selesaikanlah persamaan ${}^3\log^2 \log x = 0$.

a. 1
b. 2
c. 3
d. 8
e. 9