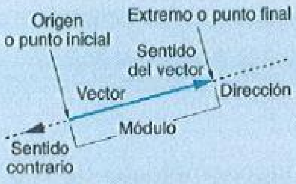
11 Geometría analítica

VECTORES



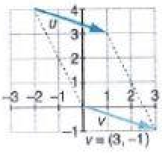
Un vector es un segmento orientado en el espacio que está determinado por un punto inicial u **origen**, y un punto final o **extremo**.

Módulo de un vector $\vec{u}(a, b): |\vec{u}| = \sqrt{a^2 + b^2}$

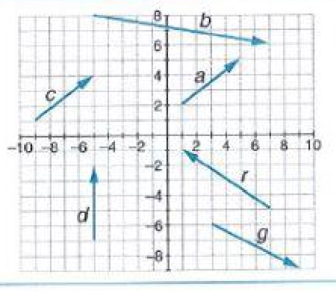
Suma y resta de vectores: $\vec{u} \pm \vec{v} = (u_1 \pm v_1,\ u_2 \pm v_2)$

Producto de un escalar por un vector: $k \cdot \vec{u} = (ku_1,\ ku_2)$

Las coordenadas de un vector de posición representan las coordenadas de cualquier vector equipolente a él. Para calcular las coordenadas de estos vectores desplazamos dichos vectores hasta el origen de coordenadas como en la figura:

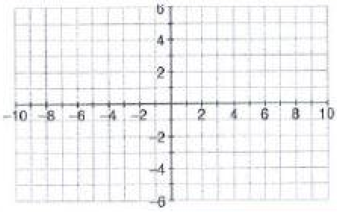


204 Indica las coordenadas de estos vectores:



205 Dibuja en un eje de coordenadas los siguientes vectores:

a) $\vec{a}(5,\ 4)$
b) $\vec{b}(-6,\ 2)$
c) $\vec{c}(7,\ -4)$
d) $\vec{d}(-4,\ -3)$



VECTOR DE POSICIÓN

Dado un punto P, definimos el **vector de posición** del punto, $\overrightarrow{OP}$, como el vector de origen el origen de coordenadas y extremo el punto P.

Aplicaciones:

Vector determinado por 2 puntos A y B: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

Distancia entre dos puntos: $d(A,B) = \left|\overrightarrow{AB}\right|$

Punto medio de un segmento: $\overline{OM} = \dfrac{\overline{OA} + \overline{OB}}{2}$

Simétrico del punto A respecto del punto B: $\overline{OS} = 2\overline{OB} - \overline{OA}$

- Hallar las coordenadas de un vector que tiene por extremos $A(-1, 9)$, $B(8, -1)$

El vector es la diferencia entre el punto B y el A.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (8,\ -1) - (-1,\ 9) = (9,\ -10)$$

- Calcula la distancia entre los puntos $A(-3, -3)$, $B(8, -3)$

$$d(A, B) = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(8+3)^2 + (-3+3)^2} = 11$$

- Halla el punto medio del segmento $\overline{AB}$: $A(-1, -2)$, $B(-6, -7)$

$$\overline{OM} = \frac{\overline{OA} + \overline{OB}}{2} = \frac{(-1,\ -2) + (-6,\ -7)}{2} = \frac{(-7,\ -9)}{2} = \left(-\frac{7}{2},\ -\frac{9}{2}\right)$$

- Determinar el simétrico de A respecto a B: $A(11, -2)$, $B(8, -2)$

$$\overline{OS} = 2\overline{OB} - \overline{OA} = 2(8,\ -2) - (11,\ -2) = (5,\ -2)$$

206 Dados los vectores $\vec{a}(3,\ -1)$ y $\vec{b}(-4,\ 3)$ calcula:

a) $|\vec{a}|$

b) $|\vec{b}|$

c) $\vec{a} + \vec{b}$

d) $\vec{a} - \vec{b}$

e) $2\vec{a} - \vec{b}$

f) $\vec{a} + 3\vec{b}$

g) $3\vec{b}$

h) $|5\vec{b}|$

207 Determina las coordenadas de un vector que tiene por extremos los siguientes puntos:

a) $A(5, 4)$, $B(2, 1)$

b) $A(5, -4)$, $B(4, 2)$

c) $A(3, -4)$, $B(-2, 3)$

d) $A(6, 5)$, $B(-7, -2)$

e) $A(5, 7)$, $B(-2, 6)$

f) $A\ (2, 8)$, $B\ (6, 3)$

g) $A\ (-4, 4)$, $B\ (-7, -2)$

208 Calcula la distancia entre los siguientes puntos:

a) $A\ (3, 2)$, $B\ (2, -1)$

b) $A\ (7, -3)$, $B\ (2, -2)$

c) $A\ (8, -4)$, $B\ (-5, 3)$

209 Determina el punto medio del segmento $\overline{AB}$ siendo los puntos:

a) $A\ (3, 6)$, $B\ (-2, 3)$

b) $A\ (6, -4)$, $B\ (3, 2)$

c) $A\ (-3, 7)$, $B\ (-5, 4)$

d) $A\ (-5, 2)$, $B\ (9, -4)$

e) $A\ (-1, 2)$, $B\ (-3, -7)$

f) $A\ (1, 8)$, $B\ (-1, -5)$

210 Dados los siguientes puntos determina el simétrico de A respecto a B:

a) $A\ (5, 6)$, $B\ (-4, 3)$

b) $A\ (6, -1)$, $B\ (-4, 2)$

c) $A\ (5, -7)$, $B\ (-1, 4)$

d) $A\ (3, -2)$, $B\ (8, -5)$

e) $A\ (-1, -2)$, $B\ (-6, -7)$

f) $A\ (7, -6)$, $B\ (-8, -5)$

g) $A\ (-3, 7)$, $B\ (-27, 9)$

VECTORES PARALELOS

Dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son paralelos si $u_1v_2 = u_2v_1$

Dados tres puntos A, B y C diremos que están alineados si están en la misma recta, esto es, si los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son paralelos.

Comprobar si los puntos A (–1, 4), B (2, 1), C (3, – 1) están alineados.

Calculamos los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ y si estos son paralelos los puntos están alineados:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (2,\ 1) - (-1,\ 4) = (3, -3)$$
$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = (3,\ -1) - (-1,\ 4) = (4, -5)$$
$$(-3)\cdot 5 \neq -3\cdot 4 \Leftrightarrow -15 \neq -12$$

Los tres puntos no están alineados.

211 Indica si los siguientes vectores son paralelos:

a) $\vec{a}(5, -3)$ y $b(10, -6)$

b) $\vec{a}(15, -10)$ y $\vec{b}(-6,\ 4)$

c) $\vec{a}(3, -1)$ y $\vec{b}(6,\ 2)$

d) $\vec{a}(12, -9)$ y $\vec{b}(-8,\ 6)$

212 Encuentra un vector paralelo a:

a) $\vec{a}(2, -1)$

b) $\vec{a}(-5,\ 4)$

213 Indica si los siguientes puntos están alineados:

a) A (2, – 1), B (6, 1), C (10, 3)

b) A (– 2, – 5), B (– 6, 1), C (– 8, 4)

PRODUCTO ESCALAR

El producto escalar de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ se define como:

$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cos\alpha$

donde α es el ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$. El producto escalar se calcula así:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2$$

Dos vectores son perpendiculares si su producto escalar es cero.

- Calcular el producto escalar de: $\vec{a}(2, -9)$ y $\vec{b}(-8, 2) \Rightarrow$

  $\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot (-8) + (-9) \cdot 2 = -34$

- Hallar el ángulo formado por los vectores: $\vec{a}(2, -1)$ y $\vec{b}(5, 2)$

  Para calcular el ángulo que forman dos vectores despejamos el coseno del producto escalar.

  $$\cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \Rightarrow \alpha = \arccos \frac{2 \cdot 5 + (-1) \cdot 2}{\sqrt{2^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{5^2 + 2^2}} \Rightarrow$$

  $$\Rightarrow \alpha = \arccos \frac{8}{\sqrt{145}} = 0'66 \Rightarrow \alpha = 48'36^\circ$$

214 Calcula el producto escalar de los siguientes pares de vectores:

a) $\vec{a}(3, -7)$ y $\vec{b}(1, -6)$

b) $\vec{a}(5, -2)$ y $\vec{b}(3, 1)$

c) $\vec{a}(2, -1)$ y $\vec{b}(-5, 2)$

215 Determina si los siguientes pares de vectores son perpendiculares:

a) $\vec{a}(3, 9)$ y $\vec{b}(6, -2)$

b) $\vec{a}(5, -2)$ y $\vec{b}(6, 15)$

c) $\vec{a}(2, -1)$ y $\vec{b}(-1, 1)$

216 Calcula el ángulo que forman los siguientes pares de vectores.

a) $\vec{a}(1, -2)$ y $\vec{b}(6, -1)$

b) $\vec{a}(-1, -1)$ y $\vec{b}(-2, 1)$

ECUACIONES DE LA RECTA

La **ecuación vectorial** de una recta es de la forma:

$$Q = P + k \cdot \vec{u} \text{ con } k \in R$$

Donde P es un punto fijo de la recta y $\vec{u}$ un vector director.

La expresión en **ecuaciones paramétricas** de una recta es de la forma:

$$\begin{cases} x = a + ku_1 \\ y = b + ku_2 \end{cases} \text{con } k \in \mathrm{R}$$

Donde (a, b) es un punto fijo de la recta y (u_1, u_2) es un vector director.

La **ecuación continua** de una recta es de la forma:

$$\frac{x-a}{u_1} = \frac{y-b}{u_2}$$

Donde (a, b) es un punto fijo de la recta y (u_1, u_2) es un vector director.

La **ecuación punto-pendiente** de una recta es de la forma:

$$y = m(x - a) + b$$

Donde (a, b) es un punto fijo de la recta y m es su pendiente.

La **ecuación general** de una recta es de la forma:

$$ax + by + c = 0$$

Donde (a, b) es el vector normal de la recta.

Dadas dos rectas, $r \equiv ax + by + c = 0$ y $s \equiv a'x + b'y + c' = 0$

r y s **son coincidentes** si $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ r y s son **paralelas** si $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$

r y s son **secantes** si $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$

El ángulo entre dos rectas coincide con el que forman sus vectores directores y sus vectores normales.

217 Una recta pasa por el punto $P(2, 1)$ y su vector director es el $\vec{v}(3, 4)$. Determina tres puntos de dicha recta.

218 Una recta pasa por el punto $A(-4, 6)$ y $B(5, -3)$. Determina el vector director de la recta y sus ecuaciones paramétricas.

219 Determina las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $A(3, -1)$ y tiene como vector director $\vec{v}(2, 3)$.

220 Calcula la ecuación continua de una recta que pasa por el punto $A\ (1, -3)$ y tiene por vector director $\vec{v}(-1, 2)$.

221 Dada la recta $\frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{3}$ determina su vector director y tres puntos de la recta.

222 Determina la ecuación punto pendiente de una recta que pasa por $A\ (4, -5)$ y tiene por pendiente $m = -2$

223 Encuentra la ecuación punto pendiente de una recta que pasa por $A\ (2, -1)$ y tiene por vector director $\vec{v}(4, 2)$.

224 Determina la ecuación general de una recta que pasa por $A\ (3, 4)$ y tiene por vector director $\vec{v}(-1, 2)$.

225 Halla la ecuación general de la recta que pasa por $A\ (3, -1)$ y $B\ (-2, 5)$.

226 Calcula la ecuación general de la recta $\frac{x-3}{-4} = \frac{y+1}{3}$ y halla el vector director.

227 Determina la posición relativa de las siguientes rectas, y si lo hubiera, su punto de intersección:

a) $r \equiv 4x + 10y - 5 = 0,\ \ s \equiv 6x + 15y - 8 = 0$

b) $r \equiv 2x - y - 7 = 0,\ \ s \equiv -3x + 2y + 11 = 0$

228 Determina la posición relativa de las siguientes rectas: $r \equiv \begin{cases} x = 2 + k \\ y = 3 + 4k \end{cases}$ $s \equiv \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+1}{-12}$

229 Calcula el punto de intersección de $r \equiv x + 2y - 1 = 0$ y $s \equiv 2x - 5y - 11 = 0$

230 Encuentra la ecuación de la recta paralela a la recta $r \equiv 3x - y + 1 = 0$ y que pasa por el punto $A\ (3,\ 1)$.

231 Dada la ecuación de la recta $s \equiv \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+1}{-2}$ calcula:

a) Una recta paralela a s que pase por $A\ (4,\ 3)$

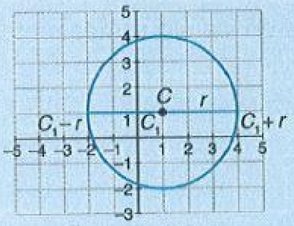
b) Una recta perpendicular a s que pasa por $B\ (-2,\ 5)$

232 Determina el ángulo que forman los siguientes pares de rectas:

a) $r \equiv x + 2y - 1 = 0$ y $s \equiv 2x + 3y - 1 = 0$

b) $r \equiv x - 5y + 6 = 0,\ \ s \equiv 2x - y + 4 = 0$

ECUACIÓN DE LA CIRCUNFERENCIA



$C_1 - r \leq x \leq C_1 + r$

Una **circunferencia** es el lugar geométrico de los puntos del plano tales que la distancia a un punto fijo es constante.

Al punto fijo se le denomina **centro**.

La distancia de los puntos a dicho punto es el **radio**.

La **ecuación reducida de la circunferencia** de centro $C = (c_1, c_2)$ y radio r es:

$$(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = r^2$$

La ecuación general de la circunferencia es de la forma:

$$x^2 + y^2 - Ax + By + C = 0$$

Donde: $A = -2c_1$; $B = -2c_2$; $C = c_1^2 + c_2^2 - r^2$

233 De las siguientes circunferencias indica su centro su radio y dos puntos de la misma:

a) $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 6$

b) $x^2 + (y-2)^2 = 1$

c) $x^2 + y^2 = 8$

234 Halla la ecuación de la circunferencia que:

a) Tiene como centro el origen de coordenadas y radio 2.

b) Tiene como centro C (3, 4) y radio 3.