LEMBAR KERJA PESERTA DIDIK (LKPD)

Pembuktian Geometris Menggunakan Vektor

Matematika Lanjut
Kelas XII / Fase F • 60 Menit

Nama Siswa	----------	Kelas	XII

🎯 Tujuan & Makna Pembelajaran (Mengapa Kita Belajar Ini?)

Tujuan & Indikator Ketercapaian:

- Menyatakan koordinat geometri ke dalam vektor posisi secara akurat.
- Membuktikan sifat bangun datar (seperti jajargenjang) dan sifat titik tengah menggunakan operasi aljabar vektor.
- Menyusun alur argumen pembuktian secara logis, runtut, dan terstruktur.

❓ Pertanyaan:

Pernahkah kamu memikirkan bagaimana sistem navigasi GPS atau radar penerbangan bisa memastikan dua pesawat berada di jalur yang sejajar tanpa bertabrakan, hanya dengan mengolah angka koordinat?

🌱 Kamu harus tahu!

Mempelajari vektor bukan sekadar menghafal deretan rumus, melainkan melatih **cara berpikir abstrak dan logis**. Vektor adalah "bahasa universal" yang menerjemahkan dunia ruang dan arah (geometri visual) ke dalam perhitungan presisi (aljabar mutlak). Di dunia nyata, konsep ini menjadi nyawa utama dalam animasi 3D, arsitektur, navigasi satelit, hingga rekayasa konstruksi. Dengan memahami materi ini, kamu sedang melatih otakmu untuk membedah masalah kompleks secara matematis dan tak terbantahkan.

💡 4 Langkah Kunci Pembuktian Geometris Vektor:

1. **Representasi Vektor Posisi:** Ubah titik sudut bangun $A, B, C...$ menjadi vektor posisi $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}...$
2. **Formulasi Vektor Sisi:** Tentukan vektor setiap ruas garis sebagai selisih ujung dan pangkal $(\mathbf{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a})$.
3. **Syarat Geometri Aljabar:** Untuk sejajar, buktikan $\mathbf{AB} = \mathbf{DC}$ atau kelipatan skalarnya. Untuk titik tengah, gunakan $\mathbf{m} = ½(\mathbf{a} + \mathbf{b})$.
4. **Kesimpulan:** Tarik argumen final berdasarkan kesamaan perhitungan aljabar yang diperoleh.

LIVEWORKSHEETS

📌 CONTOH SOAL & PEMBAHASAN

Masalah: Diberikan empat titik sudut segi empat $ABCD$ yaitu $A(1, 1)$, $B(7, 1)$, $C(9, 5)$, dan $D(3, 5)$.
a) Buktikan bahwa $ABCD$ adalah bangun jajargenjang!
b) Buktikan bahwa diagonal AC dan diagonal BD memiliki titik tengah yang sama (berimpit)!

Penyelesaian:

1. Vektor Posisi Titik Sudut:

$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$

2. Pembuktian Jajargenjang (Sisi Berhadapan):

• $\mathbf{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a} = \begin{bmatrix} 7-1 \\ 1-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$ | • $\mathbf{DC} = \mathbf{c} - \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 9-3 \\ 5-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$

Karena $\mathbf{AB} = \mathbf{DC} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$, maka sisi AB sejajar dan sama panjang dengan DC.

• $\mathbf{AD} = \mathbf{d} - \mathbf{a} = \begin{bmatrix} 3-1 \\ 5-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ | • $\mathbf{BC} = \mathbf{c} - \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 9-7 \\ 5-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$

Karena $\mathbf{AD} = \mathbf{BC} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$, maka $ABCD$ terbukti sah sebagai **jajargenjang**.

3. Pembuktian Perimpitan Titik Tengah Diagonal:

• Titik tengah AC $(\mathbf{m}_1)$: $\mathbf{m}_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{c}) = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 10 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$

• Titik tengah BD $(\mathbf{m}_2)$: $\mathbf{m}_2 = \frac{1}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{d}) = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 10 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$

Karena $\mathbf{m}_1 = \mathbf{m}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$, terbukti kedua diagonal saling membagi dua persis di titik $M(5, 3)$.

✏️ LATIHAN SOAL

Soal 1 (Pembuktian Jajargenjang):

Diberikan empat titik pada bidang pemetaan $P(-2, -1)$, $Q(4, -1)$, $R(6, 3)$, dan $S(0, 3)$. Susun argumen pembuktian aljabar vektor bahwa segi empat $PQRS$ adalah sebuah jajargenjang!

Langkah 1: Tuliskan Vektor Posisi Masing-Masing Titik

$\mathbf{p} =$ ‹ ---------- ›, $\mathbf{q} =$ ‹ ---------- ›, $\mathbf{r} =$ ‹ ---------- ›, $\mathbf{s} =$ ‹ ---------- ›

LIVEWORKSHEETS

Langkah 2: Hitung Vektor Sisi Berhadapan (PQ & SR, serta PS & QR)

- $\mathbf{PQ} = \mathbf{q} - \mathbf{p} = \langle$ ..... $\rangle - \langle$ ..... $\rangle = \langle$ ..... $\rangle$
- $\mathbf{SR} = \mathbf{r} - \mathbf{s} = \langle$ ..... $\rangle - \langle$ ..... $\rangle = \langle$ ..... $\rangle$
- $\mathbf{PS} = \mathbf{s} - \mathbf{p} = \langle$ ..... $\rangle - \langle$ ..... $\rangle = \langle$ ..... $\rangle$
- $\mathbf{QR} = \mathbf{r} - \mathbf{q} = \langle$ ..... $\rangle - \langle$ ..... $\rangle = \langle$ ..... $\rangle$

Langkah 3: Kesimpulan Pembuktian

Karena $\mathbf{PQ} = \mathbf{SR} = \langle$ ..... $\rangle$ dan $\mathbf{PS} = \mathbf{QR} = \langle$ ..... $\rangle$, maka sisi-sisi yang berhadapan sejajar dan sama panjang. Oleh karena itu, segi empat $PQRS$ terbukti sebagai bangun .....

Soal 2 (Aplikasi Titik Tengah Navigasi):

Pos Logistik Badan SAR Nasional (Basarnas) terletak di titik $A(2, 4)$ dan Pos Pengungsian di titik $B(10, 12)$. Tentukan koordinat Pos Pantau Darurat M yang harus dibangun tepat di tengah-tengah rute garis lurus AB menggunakan rumusan vektor posisi!

Langkah Pengerjaan:

Vektor posisi titik tengah M dirumuskan dengan $\mathbf{m} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$.

$\mathbf{m} = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}10\\12\end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}\langle$ ..... $\rangle = \langle$ ..... $\rangle$

Jadi, Pos Pantau Darurat M harus didirikan pada koordinat spasial titik $M($ ....., ... $)$.

🔥 LATIHAN SOAL MANDIRI

1. Diberikan koordinat titik $A(2, 3)$ dan $B(5, 7)$. Tentukan komponen vektor $\mathbf{AB}$!
2. Tentukan koordinat titik tengah M dari ruas garis CD jika diketahui posisi $C(-1, 4)$ dan $D(3, 8)$!
3. Jika $\mathbf{u} = \begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix}$ dan $\mathbf{v} = \begin{bmatrix}6\\15\end{bmatrix}$, tentukan nilai skalar k sehingga $\mathbf{v} = k\,\mathbf{u}$!

LIVEWORKSHEETS

4. Uji dan buktikan secara aljabar vektor apakah titik $P(1, -2)$, $Q(3, 2)$, dan $R(6, 8)$ terletak pada satu garis lurus (kolinear)!
5. Diketahui segi empat $KLMN$ dengan koordinat $K(1, 1)$, $L(5, 2)$, $M(6, 5)$, dan $N(2, 4)$. Buktikan bahwa ruas garis KL sejajar dengan NM!
6. Diberikan titik $A(0, 0)$, $B(4, 2)$, dan $C(2, 6)$. Tentukan koordinat titik D agar bangun $ABCD$ membentuk sebuah jajargenjang sempurna!

Tingkat HOTS (High Order Thinking Skills)

7. Sebuah drone penyelamat bergerak lurus dari titik $C(3, -2)$ sejajar dengan lintasan referensi AB yang menghubungkan $A(-2, 1)$ dan $B(4, 9)$. Jika drone tersebut menempuh jarak dan arah yang persis sama dengan vektor lintasan $\mathbf{AB}$, tentukan koordinat akhir drone D!
8. Gunakan konsep penjumlahan vektor posisi untuk membuktikan bahwa titik berat G pada segitiga XYZ dapat dirumuskan sebagai $\mathbf{g} = \frac{1}{3}(\mathbf{x} + \mathbf{y} + \mathbf{z})$!
9. Buktikan secara analitik bahwa kedua diagonal pada bangun belah ketupat (jajargenjang dengan 4 sisi sama panjang) selalu saling tegak lurus!
   Petunjuk: Gunakan sifat perkalian skalar (dot product) $\mathbf{AC} \cdot \mathbf{BD} = 0$ dan substitusikan diagonal sebagai bentuk kombinasi dari vektor sisinya.

💬 **Refleksi Pemahaman Diri (Centang salah satu):**

[ ] Saya sangat percaya diri, saya memahami cara menerjemahkan bangun geometri ke dalam aljabar vektor.

[ ] Saya paham sebagian besar materi, namun saya masih perlu berlatih dan lebih teliti pada bagian ---------- .

LIVEWORKSHEETS