

LEMBAR KERJA PESERTA DIDIK (LKPD)

Model Eksploratif · Matematika Kelas X SMA/MA

Materi: Komposisi Fungsi dan Fungsi Invers

Nama : Kelas :
 No. Absen : Tanggal :
 Kelompok : Guru :

A. Petunjuk Belajar

1. Kerjakan LKPD ini secara berkelompok. Setiap anggota wajib terlibat dalam diskusi.
2. Tuliskan **langkah penyelesaian**, tidak hanya jawaban akhir.
3. Pada bagian **Eksplorasi**, carilah pola terlebih dahulu sebelum menarik kesimpulan. Jawaban dugaan tidak harus benar, yang penting alasannya jelas.
4. Gunakan grafik kertas milimeter bila diminta menggambar grafik.
5. Kalkulator tidak diperlukan kecuali diminta secara khusus.
6. Jika mengalami kesulitan, diskusikan dengan teman atau tanyakan kepada guru.

B. Capaian dan Tujuan Pembelajaran

Capaian Pembelajaran (acuan Kurikulum Merdeka, Fase E): Peserta didik mampu menentukan komposisi dua fungsi dan invers suatu fungsi, serta menggunakannya untuk memecahkan masalah kontekstual. *(Sesuaikan dengan CP dan ATP yang berlaku di sekolah Anda.)*

Setelah mengikuti kegiatan ini, kamu diharapkan dapat:

1. menentukan hasil komposisi dua fungsi $(f \circ g)(x)$ dan $(g \circ f)(x)$ untuk nilai x tertentu;
2. menentukan rumus komposisi dua fungsi serta daerah asalnya;
3. menjelaskan syarat suatu fungsi memiliki invers;
4. menentukan rumus fungsi invers dari suatu fungsi;
5. menyelidiki sifat-sifat komposisi fungsi dan invers;
6. menerapkan konsep komposisi dan invers fungsi dalam masalah kontekstual.

C. Apersepsi — Apa yang Sudah Kamu Ketahui?

Jawablah pertanyaan berikut sebelum memulai aktivitas. Jawaban boleh belum sempurna.

1. Jika $f(x) = x + 2$ dan $x = 3$, berapakah nilai $f(x)$?
2. Apa yang dimaksud dengan fungsi? Sebutkan syarat sebuah relasi disebut fungsi.
3. Jika kamu menghitung $(x + 2)^2$, apa yang dilakukan pertama kali: menjumlahkan 2 dengan x atau dikuadratkan?

AKTIVITAS 1 — Harga Setelah Potongan dan Pajak

Sebuah toko menerapkan dua kebijakan pada harga barang x (dalam ribu rupiah):

- **Kebijakan A (potongan):** harga dikurangi Rp5.000, dinyatakan dengan $f(x) = x - 5$.
- **Kebijakan B (pajak):** harga ditambah pajak 10%, dinyatakan dengan $g(x) = 1,1x$.

a. Lengkapilah tabel berikut. Kolom $(g \circ f)(x)$ berarti: kebijakan A dijalankan dulu, kemudian kebijakan B.

x	$f(x) = x - 5$	$g(x) = 1,1x$	$(g \circ f)(x) = g(f(x))$	$(f \circ g)(x) = f(g(x))$
20				
50				
100				

b. Apakah nilai $(g \circ f)(x)$ selalu sama dengan $(f \circ g)(x)$? Tuliskan hasil pengamatanmu.

c. Urutan kebijakan manakah yang membuat pembeli membayar lebih murah? Berikan dugaanmu, lalu periksa dengan tabel.

d. Tulislah rumus umum $(g \circ f)(x)$ dan $(f \circ g)(x)$ dalam bentuk paling sederhana.

Ingat Kembali

Komposisi fungsi $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ dibaca “f komposisi g”. Nilai dihitung **dari dalam ke luar**: $g(x)$ dikerjakan lebih dahulu, kemudian hasilnya dimasukkan ke f .

Komposisi fungsi **umumnya tidak komutatif**, artinya $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$.

AKTIVITAS 2 — Menelusuri Pemetaan dengan Diagram Panah

Diberikan himpunan $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b, c\}$, dan $C = \{4, 5, 6\}$. Didefinisikan:

$$f : A \rightarrow B \text{ dengan } f = \{(1, a), (2, b), (3, c)\}$$

$$g : B \rightarrow C \text{ dengan } g = \{(a, 4), (b, 5), (c, 6)\}$$

a. Gambarlah diagram panah untuk f dan g pada kertasmu.

b. Lengkapi perhitungan berikut:

$$(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(\dots) = \dots$$

$$(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(\dots) = \dots$$

$$(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(\dots\dots\dots) = \dots\dots\dots$$

c. Tuliskan himpunan pasangan terurut dari $g \circ f$:

d. Coba hitung $(f \circ g)(a)$. Apa yang terjadi? Mengapa demikian? Perhatikan daerah hasil g dan daerah asal f .

Ingat Kembali

Agar $(g \circ f)$ terdefinisi, **daerah hasil f harus termuat dalam daerah asal g** . Sebaliknya, agar $(f \circ g)$ terdefinisi, daerah hasil g harus termuat dalam daerah asal f .

AKTIVITAS 3 — Menemukan Rumus Komposisi Fungsi

Diberikan $f(x) = x^2 + 1$ dan $g(x) = 2x - 3$.

a. Hitung nilai berikut dengan memasukkan nilai secara bertahap:

$$g(2) = \dots\dots\dots \rightarrow f(g(2)) = f(\dots\dots\dots) = \dots\dots\dots$$

$$f(2) = \dots\dots\dots \rightarrow g(f(2)) = g(\dots\dots\dots) = \dots\dots\dots$$

b. Tentukan rumus $(f \circ g)(x)$. Petunjuk: pada rumus f , gantilah x dengan $(2x - 3)$.

c. Tentukan rumus $(g \circ f)(x)$. Petunjuk: pada rumus g , gantilah x dengan $(x^2 + 1)$.

d. Periksa jawabanmu: substitusikan $x = 2$ ke rumus $(f \circ g)(x)$ dan $(g \circ f)(x)$. Apakah hasilnya sama dengan poin a?

Ingat Kembali

Jika $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, maka rumusnya diperoleh dengan **mengganti setiap x pada $f(x)$ dengan $g(x)$** .

AKTIVITAS 4 — Menyelidiki Pasangan Invers

Perhatikan fungsi $f = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8)\}$.

a. Bentuk himpunan pasangan terurut baru dengan **menukar** posisi x dan y pada setiap pasangan. Namai himpunan baru ini sebagai f^{-1} .

b. Apakah f^{-1} merupakan sebuah fungsi? Jelaskan alasanmu.

c. Sekarang perhatikan $h = \{(1, 2), (2, 2), (3, 6)\}$. Tukarkan posisi x dan y , lalu periksa apakah hasilnya merupakan fungsi.

d. Dari pengamatanmu, apa syarat agar sebuah fungsi memiliki invers yang juga merupakan fungsi?

Ingat Kembali

Suatu fungsi f memiliki invers f^{-1} jika dan hanya jika f merupakan **fungsi bijektif**, yaitu **satu-satu** (setiap anggota daerah hasil dipasangkan dengan tepat satu anggota daerah asal) dan **pada** (semua anggota daerah kawan terpakai).

AKTIVITAS 5 — Dari Grafik ke Rumus Invers

Diberikan fungsi $f(x) = 2x + 1$.

a. Lengkapi tabel nilai fungsi berikut:

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$					

b. Dari tabel di atas, tuliskan pasangan $(f(x), x)$. Pasangan inilah yang merupakan titik-titik grafik f^{-1} .

c. Pada kertas milimeter, gambarkan grafik $f(x) = 2x + 1$, grafik $y = x$, dan grafik f^{-1} . Apa hubungan ketiga grafik tersebut? Jelaskan.

d. Ikuti langkah berikut untuk menentukan rumus $f^{-1}(x)$:

1. Tulis $y = 2x + 1$.

2. Tukarkan x dan y :

3. Selesaikan untuk y :

4. Tuliskan $f^{-1}(x) = \dots\dots\dots$

Ingat Kembali

Untuk mencari invers fungsi: (1) tulis $y = f(x)$; (2) tukar x dan y ; (3) selesaikan untuk y ; (4) nyatakan hasilnya sebagai $f^{-1}(x)$.

Grafik f^{-1} merupakan **pencerminan** grafik f terhadap garis $y = x$.

Catatan: $f^{-1}(x)$ adalah notasi invers, **bukan** $1/f(x)$.

AKTIVITAS 6 — Menyelidiki Sifat Komposisi dan Invers

Diberikan $f(x) = 2x$ dan $g(x) = x + 3$. Diketahui pula $f^{-1}(x) = x/2$ dan $g^{-1}(x) = x - 3$.

a. Tunjukkan bahwa $(f \circ f^{-1})(x) = x$ dengan menghitung $f(f^{-1}(x))$.

b. Hitung $(f \circ g)(x)$, kemudian tentukan $(f \circ g)^{-1}(x)$ dengan langkah pada Aktivitas 5.

c. Hitung $g^{-1}(f^{-1}(x))$. Bandingkan hasilnya dengan $(f \circ g)^{-1}(x)$.

d. Berdasarkan pengamatanmu, tuliskan dugaan tentang hubungan $(f \circ g)^{-1}$ dengan f^{-1} dan g^{-1} .

Rangkuman Sifat

Sifat-sifat penting:

- $(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x$
- $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$ (perhatikan urutan terbalik)

AKTIVITAS 7 — Penerapan: Konversi Suhu

Hubungan suhu dalam Celsius (C) dan Fahrenheit (F) dapat dinyatakan dengan fungsi $F(C) = 1,8C + 32$.

a. Hitunglah $F(25)$, $F(0)$, dan $F(100)$. Apa arti setiap hasil perhitungan tersebut?

b. Tentukan rumus fungsi invers $C(F) = F^{-1}(F)$, yaitu rumus untuk mengubah Fahrenheit menjadi Celsius.

c. Sebuah termometer menunjukkan 86 °F. Berapa suhunya dalam °C? Gunakan rumus invers yang kamu temukan.

d. Jelaskan dengan kalimatmu sendiri mengapa fungsi invers berguna dalam kehidupan sehari-hari.

D. Latihan Mandiri

Kerjakan soal berikut secara individu. Tuliskan langkah penyelesaianmu.

1. Diketahui $f(x) = 2x + 3$ dan $g(x) = x - 1$. Tentukan $(f \circ g)(x)$ dan $(g \circ f)(x)$. Kemudian hitung $(f \circ g)(4)$ dan $(g \circ f)(4)$.

2. Diketahui $f(x) = 3x - 2$ dan $g(x) = x^2$. Tentukan $(f \circ g)(x)$, $(g \circ f)(x)$, dan nilai $(g \circ f)(-1)$.

3. Tentukan $f^{-1}(x)$ jika $f(x) = 5x - 10$.

4. Tentukan $f^{-1}(x)$ jika $f(x) = (x + 4)/3$.

5. Tentukan $g^{-1}(x)$ jika $g(x) = x^3 + 1$. Apakah g memiliki invers? Jelaskan.

6. Diketahui $(f \circ g)(x) = 6x + 5$ dan $g(x) = 2x + 1$. Tentukan rumus $f(x)$.

7. Diketahui $f(x) = 2x + 1$ dan $(g \circ f)(x) = 4x^2 + 4x + 1$. Tentukan rumus $g(x)$.

8. Diketahui $f(x) = 1/(x - 2)$ dan $g(x) = x + 3$. Tentukan $(f \circ g)(x)$ beserta daerah asalnya.

9. **(HOTS)** Sebuah toko memberikan dua promo pada harga barang x (dalam rupiah). Promo 1: diskon 20% dahulu, kemudian potongan Rp10.000. Promo 2: potongan Rp10.000 dahulu, kemudian diskon 20%. Nyatakan kedua promo dengan komposisi fungsi, lalu tentukan promo mana yang lebih murah dan berapa selisihnya.

E. Refleksi

1. Bagian mana dari LKPD ini yang paling sulit bagimu? Mengapa?
2. Apa perbedaan utama antara $(f \circ g)(x)$ dan $(g \circ f)(x)$?
3. Bagaimana cara kamu memastikan bahwa suatu fungsi memiliki invers?

F. Kesimpulan

Lengkapilah kesimpulan kelompokmu berdasarkan hasil kegiatan:

1. Komposisi fungsi $(f \circ g)(x) = \dots\dots\dots$
2. Syarat fungsi memiliki invers: $\dots\dots\dots$
3. Cara menentukan rumus invers: $\dots\dots\dots$
4. Sifat komposisi dan invers: $\dots\dots\dots$

LAMPIRAN — Kunci Jawaban dan Pembahasan (untuk Guru)

Halaman ini dapat dicetak terpisah dan tidak dibagikan kepada peserta didik.

Aktivitas 1

x	$f(x) = x - 5$	$g(x) = 1,1x$	$(g \circ f)(x)$	$(f \circ g)(x)$
20	15	22	16,5	17
50	45	55	49,5	50
100	95	110	104,5	105

- $(g \circ f)(x) = 1,1(x - 5) = 1,1x - 5,5$ dan $(f \circ g)(x) = 1,1x - 5$. Keduanya berbeda, jadi tidak komutatif.
- Dugaan urutan: jika potongan (f) dilakukan dahulu lalu pajak (g), pembeli membayar lebih murah.

Aktivitas 2

- $(g \circ f)(1) = g(a) = 4$; $(g \circ f)(2) = g(b) = 5$; $(g \circ f)(3) = g(c) = 6$.
- $g \circ f = \{(1, 4), (2, 5), (3, 6)\}$.
- $(f \circ g)(a)$ tidak terdefinisi karena $g(a) = 4$, dan 4 bukan anggota daerah asal $f = \{1, 2, 3\}$.

Aktivitas 3

- $g(2) = 1$, $f(1) = 2 \rightarrow f(g(2)) = 2$. $f(2) = 5$, $g(5) = 7 \rightarrow g(f(2)) = 7$.
- $(f \circ g)(x) = (2x - 3)^2 + 1 = 4x^2 - 12x + 10$.
- $(g \circ f)(x) = 2(x^2 + 1) - 3 = 2x^2 - 1$.
- Pemeriksaan $x = 2$: $(f \circ g)(2) = 4 \cdot 4 - 24 + 10 = 2$ dan $(g \circ f)(2) = 2 \cdot 4 - 1 = 7$. Sesuai dengan poin a.

Aktivitas 4

- $f^{-1} = \{(2, 1), (4, 2), (6, 3), (8, 4)\}$, merupakan fungsi.
- $h^{-1} = \{(2, 1), (2, 2), (6, 3)\}$. Karena $x = 2$ memiliki dua pasangan, h^{-1} bukan fungsi, sehingga h tidak memiliki invers fungsi.
- Syarat: fungsi harus bijektif (satu-satu dan pada).

Aktivitas 5

- $f(-1) = -1$; $f(0) = 1$; $f(1) = 3$; $f(2) = 5$; $f(3) = 7$.
- Pasangan invers: $(-1, -1)$, $(1, 0)$, $(3, 1)$, $(5, 2)$, $(7, 3)$.
- Ketiga grafik: f dan f^{-1} simetris terhadap garis $y = x$.
- Langkah: $y = 2x + 1 \rightarrow x = 2y + 1 \rightarrow y = (x - 1)/2 \rightarrow f^{-1}(x) = (x - 1)/2$.

Aktivitas 6

- $f(f^{-1}(x)) = 2 \cdot (x/2) = x$. Demikian pula $f^{-1}(f(x)) = (2x)/2 = x$.
- $(f \circ g)(x) = 2(x + 3) = 2x + 6 \rightarrow (f \circ g)^{-1}(x) = (x - 6)/2$.
- $g^{-1}(f^{-1}(x)) = x/2 - 3 = (x - 6)/2$. Sama dengan $(f \circ g)^{-1}(x)$.
- Dugaan: $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$ (urutan dibalik).

Aktivitas 7

- $F(25) = 77$ °F (suhu 25 °C); $F(0) = 32$ °F (titik beku air); $F(100) = 212$ °F (titik didih air).
- $F^{-1}(F) = (F - 32)/1,8 = (5/9)(F - 32)$.
- $C = (86 - 32)/1,8 = 30$ °C.

Latihan Mandiri

- $(f \circ g)(x) = 2x + 1$; $(g \circ f)(x) = 2x + 2$. $(f \circ g)(4) = 9$; $(g \circ f)(4) = 10$.
- $(f \circ g)(x) = 3x^2 - 2$; $(g \circ f)(x) = 9x^2 - 12x + 4$; $(g \circ f)(-1) = 25$.
- $f^{-1}(x) = (x + 10)/5$.
- $f^{-1}(x) = 3x - 4$.
- $g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 1}$. Ya, g memiliki invers karena g bijektif pada $\mathbb{R}$ (fungsi kubik naik monoton).
- $f(x) = 3x + 2$. Pemeriksaan: $f(2x + 1) = 3(2x + 1) + 2 = 6x + 5$.
- $g(x) = x^2$. Pemeriksaan: $g(2x + 1) = (2x + 1)^2$.
- $(f \circ g)(x) = 1/(x + 3 - 2) = 1/(x + 1)$. Daerah asal: $x \neq -1$.
- Misal $h(x) = 0,8x$ dan $k(x) = x - 10.000$. Promo 1 = $(k \circ h)(x) = 0,8x - 10.000$; Promo 2 = $(h \circ k)(x) = 0,8x - 8.000$. Promo 1 lebih murah dengan selisih tetap Rp2.000.