

LKM Digital

Berbasis PMRI

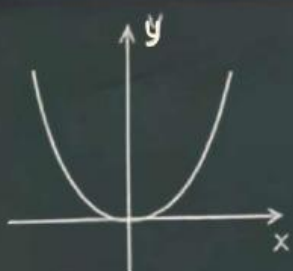
Materi Fungsi Kuadrat

$$y = ax^2 + bx + c$$



Nama: _____ No: _____

Think
Explore
Solve
Grow



$$y = ax^2 + bx + c$$

$$a > 0$$

$$a < 0$$



Mata Pelajaran Matematika
Kelas X

TAHAPAN

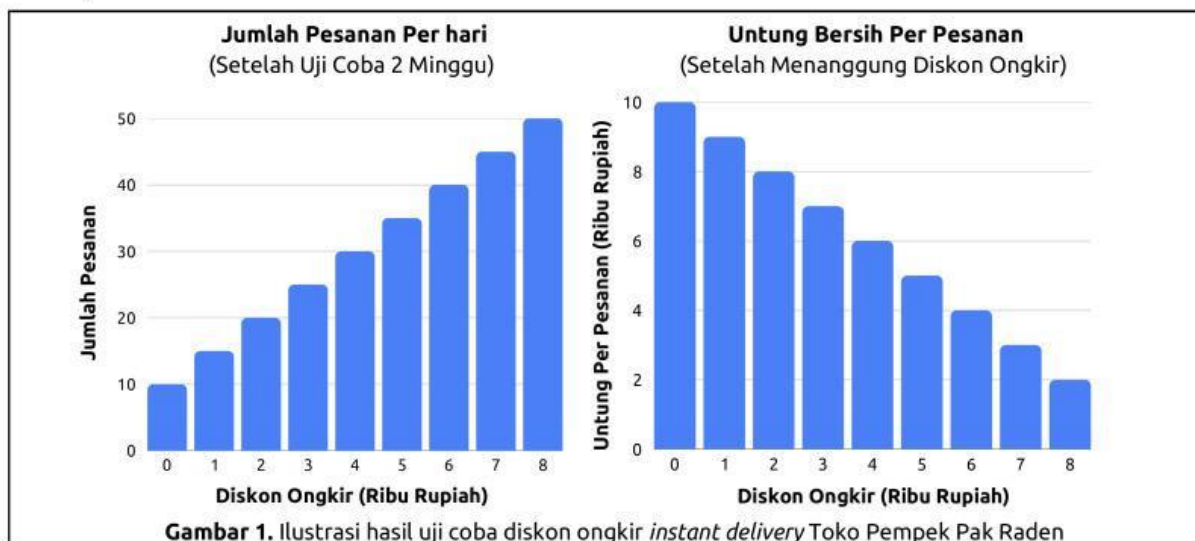
Tahapan Situational



Memahami Situasi Nyata

Diskon Ongkir Pada Layanan *Instant Delivery* dan Keuntungan Toko Pempek Pak Raden

Toko Pempek Pak Raden sedang mempertimbangkan memberi diskon ongkir pada layanan *instant delivery* supaya makin banyak pelanggan tertarik memesan. Namun, setiap rupiah diskon ongkir yang ditanggung toko juga mengurangi untung bersih dari setiap pesanan. Selama dua minggu, toko mencoba beberapa besar diskon ongkir yang berbeda dan mencatat hasilnya.



Gambar 1. Ilustrasi hasil uji coba diskon ongkir *instant delivery* Toko Pempek Pak Raden

Amati dan Diskusikan

Perhatikan kedua grafik di atas. Semakin besar diskon ongkir yang diberikan, jumlah pesanan semakin banyak, tetapi untung per pesanan semakin kecil. Menurutmu, bagaimana pola untung total per hari (jumlah pesanan $\times$ untung per pesanan) seiring bertambahnya diskon ongkir? Apakah akan terus naik, terus turun, atau naik lalu turun?

Answers

Perhatikan kedua grafik di atas. Semakin besar diskon ongkir, jumlah pesanan semakin banyak, tapi untung per pesanan semakin kecil. Coba bayangkan dua kondisi ekstrem: Kalau diskonnya sangat kecil (hampir Rp0), untung per pesanan besar tapi pesanan sedikit. Kalau diskonnya sangat besar (Rp8.000), pesanan banyak tapi untung per pesanan hampir habis. Menurutmu, di kondisi mana untung total toko lebih besar? Coba jelaskan alasanmu.

Answers



Question

Coba hitung untung total pada saat diskon ongkir Rp0 (tanpa diskon) dan diskon ongkir Rp8.000, menggunakan data pada Gambar 1. Lengkapi tabel berikut, lalu tuliskan perbandingan hasilnya dalam 2-3 kalimat.

	Diskon Ongkir = Rp0	Diskon Ongkir = Rp8.000
Jumlah Pesanan		
Untung Per Pesanan		
Untung total (jumlah pesanan × untung per pesanan)		

Perbandingan

Answers

TAHAPAN

Tahapan Referential

Untuk melihat pola untung total secara menyeluruh, hitung untung total:

Untung Total = Jumlah pesanan × untung per pesanan

Untuk setiap nilai diskon ongkir pada Gambar 1. Lengkapi tabel berikut.

x (Diskon Ongkir)	Jumlah Pesanan	Untung Per Pesanan	$P(x)$ = Untung Total
0			
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			

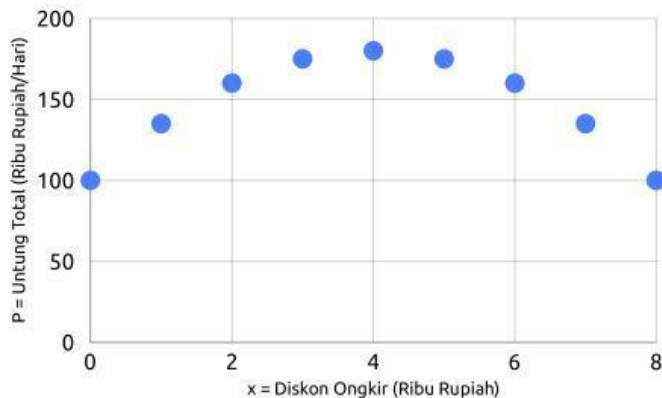
Catatan Penting

Nilai $P(x)$ diperoleh dari perkalian jumlah pesanan dan untung per pesanan untuk setiap nilai x (besar diskon ongkir dalam ribu rupiah), sesuai data pada Gambar 1. Contoh untuk $x = 0$: jumlah pesanan = 10, untung per pesanan = Rp10.000, sehingga $P(0) = 10 \times 10.000 = 100$ (dalam ribu rupiah). Gunakan cara yang sama untuk mengisi tabel di atas.



Question

Buka file GeoGebra yang sudah disediakan. Masukkan ketujuh titik data $(x, P(x))$ ke bidang koordinat GeoGebra.



CLICK HERE



Klik disini untuk masuk ke aplikasi Geogebra!

Gambar 2. Ilustrasi tampilan GeoGebra dengan titik data untung total Toko Pempek Pak Raden

Amati sebaran titik-titik tersebut pada Gambar 2.

Apakah titik-titiknya naik terus, turun terus, atau naik dulu baru turun?

Answers

Kalau titik-titik itu dihubungkan dengan kurva mulus, kira-kira bentuknya menyerupai apa? (Misalnya: seperti bukit, seperti huruf U terbalik, atau bentuk lain? Coba gambarkan dengan kata katamu sendiri.)

Answers

Apakah dugaanmu di Tahap 1 (soal nomor 1) sesuai dengan pola yang terlihat sekarang?

Answers

TAHAPAN

Tahapan General

Perhatikan tabel data. Bandingkan nilai $P(x)$ pada $x = 3$ dengan $x = 5$, serta pada $x = 2$ dengan $x = 6$. Apa yang kamu temukan? Menurutmu, mengapa keduanya bisa bernilai sama?

Answers



Question

Perhatikan tabel data $P(x)$ yang sudah kamu isi.

Pada nilai x berapa, $P(x)$ mencapai nilai paling besar? Berapa nilai $P(x)$ di titik tersebut?

Answers

Perhatikan nilai $P(x)$ sebelum dan sesudah titik tertinggi tersebut. Dari $x = 0$ sampai titik tertinggi tadi, apakah nilai $P(x)$ naik, turun, atau tetap? Dari titik tertinggi tadi sampai $x = 6$, apakah nilai $P(x)$ naik, turun, atau tetap?

Answers

Perhatikan besar kenaikan/penurunan $P(x)$ di setiap langkah (misalnya dari $x=0$ ke $x=1$, $x=1$ ke $x=2$, dan seterusnya, sampai mendekati titik tertinggi, lalu setelah melewatinya). Apakah besar kenaikan/penurunannya selalu sama, atau berubah-ubah? Jelaskan apa yang kamu amati.

Answers

Ingat kembali bagaimana $P(x)$ diperoleh di Tahap 2:

$P(x) = (\text{jumlah pesanan}) \times (\text{untung per pesanan})$

Perhatikan kembali tabel berikut, lalu lengkapi kolom "Selisih" untuk melihat pertambahan atau pengurangan dari satu baris ke baris berikutnya.



Jumlah Pesanan

x (Diskon Ongkir)	Jumlah Pesanan	Selisih dari Baris Sebelumnya
0	10	
1	15	
2	20	
3	25	
4	30	
5	35	
6	40	
7	45	
8	50	

Dari selisih yang kamu temukan, tuliskan bentuk umum jumlah pesanan dalam x :



Question



Untung Per Pesanan

x (Diskon Ongkir)	Untung Per Pesanan	Selisih dari Baris Sebelumnya
0	10	
1	9	
2	8	
3	7	
4	6	
5	5	
6	4	
7	3	
8	2	

Dari selisih yang kamu temukan, tuliskan bentuk umum untung per pesanan dalam x:

Perhatikan besar kenaikan/penurunan $P(x)$ di setiap langkah (misalnya dari $x=0$ ke $x=1$, $x=1$ ke $x=2$, dan seterusnya, sampai mendekati titik tertinggi, lalu setelah melewatinya). Apakah besar kenaikan/penurunannya selalu sama, atau berubah-ubah? Jelaskan apa yang kamu amati.

Answers

TAHAPAN

Tahapan Formal

Jabarkan perkalian $P(x) = (10+5x)(10-x)$ menjadi bentuk umum $P(x) = ax^2+bx+c$. Tentukan nilai a, b, dan c.

Answers

Periksa kembali: masukkan $x = 3$ dan $x = 4$ ke fungsi $P(x)$ yang kamu peroleh. Apakah hasilnya sesuai dengan data pada tabel (175 dan 180)?

Answers



Question

Mengapa hasil kali dua bentuk linear seperti dan dapat menghasilkan fungsi kuadrat? Jelaskan dengan bahasamu sendiri.

Answers



Kesimpulan

Ketika dua besaran yang saling berlawanan arah perubahannya (jumlah pesanan naik, untung per pesanan turun) dikalikan, hasilnya membentuk fungsi kuadrat $P(x) = a x^2 + b x + c$. Fungsi ini disebut fungsi kuadrat karena variabel x berpangkat tertinggi dua. Fungsi $P(x)$ yang sudah kamu konstruksi ini akan digunakan kembali pada aktivitas berikutnya untuk mempelajari grafik dan ciri-cirinya lebih lanjut, termasuk menentukan besar diskon ongkir yang memberikan untung maksimal bagi Toko Pempek Pak Raden.

LKM Digital

Berbasis PMRI

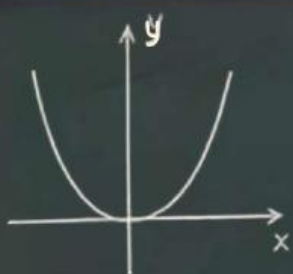
Materi Fungsi Kuadrat

$$y = ax^2 + bx + c$$



Nama: _____ No: _____

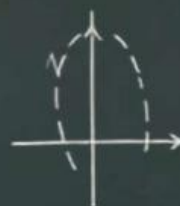
Think
Explore
Solve
Grow



$$y = ax^2 + bx + c$$

$$a > 0$$

$$a < 0$$



Mata Pelajaran Matematika
Kelas X

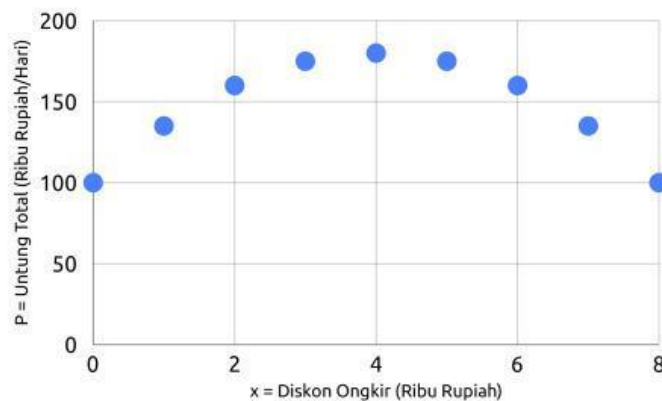
TAHAPAN

Tahapan Situational



Memahami Situasi Nyata

Pada Aktivitas 1, kamu sudah mengonstruksi fungsi $P(x) = ax^2 + bx + c$ yang merepresentasikan untung total Toko Pempek Cek Minah terhadap besar diskon ongkir. Namun, data yang dikumpulkan hanya pada sembilan nilai x tertentu. Pemilik toko ingin tahu lebih pasti, pada diskon berapa untungnya benar-benar paling besar, dan pada diskon berapa untungnya justru habis (tidak untung sama sekali)?



Gambar 1. Grafik sementara untung total Toko Pempek Pak Raden dari data yang telah dikumpulkan

Amati dan Diskusikan

Perhatikan bentuk kurva pada Gambar 1. Titik-titik data hanya menunjukkan sebagian informasi. Menurutmu, apakah titik puncak grafik ini tepat berada di salah satu titik data yang sudah dikumpulkan, atau bisa jadi di antara titik-titik tersebut?

Answers

Berdasarkan Gambar 1, berikan perkiraanmu sekitar di titik data mana kira-kira letak titik puncak grafik ini?

Answers

Perhatikan juga bagian kurva yang memotong sumbu-x ($P(x) = 0$), ada di dua tempat pada Gambar 1. Menurutmu, pada saat itu apakah toko sedang untung, rugi, atau balik modal (tidak untung dan tidak rugi)? Jelaskan alasanmu.

Answers

TAHAPAN

Tahapan Referential



Memodelkan Situasi

Perkiraanmu di Tahap 1 belum pasti. Untuk menentukan titik puncak dan titik potong sumbu-x secara pasti, kamu akan menurunkan sendiri rumusnya menggunakan teknik melengkapkan kuadrat sempurna, dimulai dari fungsi $P(x)$ milikmu sendiri, baru kemudian digeneralisasi ke bentuk umum.



Bagian A (Menurunkan Rumus Titik Puncak)

Amati dan Diskusikan

Lengkapi langkah melengkapkan kuadrat sempurna berikut untuk fungsi $P(x) = -5x^2 + 40x + 100$ (isi bagian yang kosong dengan angka yang tepat):

Answers

$$\begin{aligned}P(x) &= -5x^2 + 40x + 100 \\&= -5(x^2 - 8x) + 100 \\&= -5(x^2 - 8x + \underline{\quad} - \underline{\quad}) + 100 \\&= -5[(x - \underline{\quad})^2 - \underline{\quad}] + 100 \\&= -5(x - \underline{\quad})^2 + \underline{\quad}\end{aligned}$$

Memaknai bentuk akhir yang kamu peroleh seharusnya $P(x) = -5(x - 4)^2 + 180$. Di Tahap 1 kamu menduga titik puncak dari tabel data. Sekarang kita periksa apakah bentuk aljabar yang baru kamu peroleh memberi cerita yang sama.

Isi tabel dibawah ini!

x (Diskon Ongkir)	$(x - 4)^2$	$-5(x - 4)^2$	$P(x) = -5(x - 4)^2 + 180$
0			
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			



Question

Selidiki suku $(x - 4)^2$

Apakah ada nilai $(x - 4)^2$ yang negatif? Jelaskan!

Answers

Berapa nilai terkecil $(x - 4)^2$? Terjadi saat x ?

Answers

Selidiki suku $-5(x - 4)^2$

Saat $(x - 4)^2$ makin besar, nilai $-5(x - 4)^2$ makin (besar / kecil)? Mengapa?

Answers

Berapa nilai terbesar $-5(x - 4)^2$? Terjadi saat x ?

Answers

Selidiki $P(x)$

Bandingkan $P(3)$ dengan $P(5)$, dan $P(2)$ dengan $P(6)$. Apa yang kamu temukan?

Answers

Adakah nilai x yang membuat $P(x)$ lebih dari 180? Jelaskan!

Answers

Jadi untung total terbesar adalah, terjadi saat x ?

Answers

Bandingkan dengan Tahap 1.

Dugaanmu di Tahap 1: untung terbesar saat $x = \dots\dots$ dengan untung

Answers



Question

Bandungkan dengan Tahap 1.

Hasil dari bentuk $P(x)$: $x = \dots\dots$ dengan untung $\dots\dots$

Answers

Apakah dugaanmu sama, mendekati, berbeda? Jika tidak sama, apa yang membuatnya meleset? $\dots\dots$

Answers



Simpulkan

Jelaskan mengapa nilai maksimum $P(x)$ pasti tercapai tepat saat $x = 4$

Kerangka bantu: Karena $(x - 4)^2$ selalu $\dots\dots$, maka $-5(x - 4)^2$ selalu $\dots\dots$. Nilai terbesarnya $\dots\dots$, saat $x = \dots\dots$. Jadi $P(x)$ paling besar $\dots\dots$ dan tidak mungkin lebih.

Sekarang ulangi proses yang sama, tetapi untuk bentuk umum $f(x) = ax^2 + bx + c$ (tanpa angka spesifik). Ikuti pola yang sama seperti langkah nomor 3, ganti saja angkanya menjadi a, b, c :

Answers

$$\begin{aligned}
 f(x) &= ax^2 + bx + c \\
 &= a(x^2 + (b/a)x) + c \\
 &= a[x^2 + (b/a)x + \underline{\hspace{1cm}} - \underline{\hspace{1cm}}] + c \\
 &= a[(x + \underline{\hspace{1cm}})^2 - \underline{\hspace{1cm}}] + c
 \end{aligned}$$

Dari bentuk yang kamu peroleh di nomor 5, tentukan nilai x yang membuat $f(x)$ mencapai nilai maksimum/minimum. Tuliskan rumus umum koordinat titik puncak (x, y) yang kamu temukan.

Answers



Question



Bagian B (Menurunkan Rumus Titik Potong Sumbu-X/Rumus ABC)

Lanjutkan dari bentuk $a(x + b/2a)^2 + (c - b^2/4a)$ yang kamu peroleh di Bagian A. Tentukan nilai x saat $f(x) = 0$ dengan melengkapi langkah berikut:

Answers

$$a(x + b/2a)^2 = b^2/4a - c$$

$$(x + b/2a)^2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$x + b/2a = \pm \underline{\hspace{2cm}}$$

$$x = \underline{\hspace{2cm}}$$

Bagian di dalam akar yang kamu peroleh $(b^2 - 4ac)$ memiliki nama khusus: Diskriminan, disingkat D. Tuliskan ulang rumus titik potong sumbu-x yang kamu peroleh menggunakan notasi D ini.

Answers

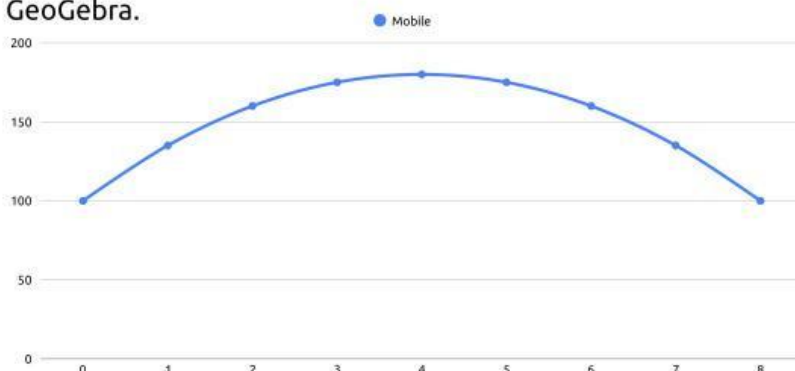
Uji rumus yang baru kamu turunkan dengan mensubstitusikan $a = -5$, $b = 40$, $c = 100$ (dari fungsi $P(x)$ milikmu). Apakah hasilnya sama dengan perkiraanmu di Tahap 1?

Answers



Verifikasi dengan GeoGebra

Untuk menentukan titik puncak dan titik potong sumbu-x secara pasti (bukan sekadar perkiraan), masukkan fungsi $P(x) = ax^2 + bx + c$ yang kamu peroleh dari Aktivitas 1 ke GeoGebra.



CLICK HERE

Klik disini untuk masuk ke aplikasi Geogebra!



Question

Catatan Penting

Nilai a , b , dan c pada GeoGebra diisi sesuai dengan hasil yang kamu peroleh di Aktivitas 1. Kotak "Titik puncak" dan "Titik potong sumbu- x " akan otomatis menampilkan koordinatnya setelah fungsi dimasukkan dengan benar.

Masukkan fungsi yang kamu peroleh dari Aktivitas 1 ke GeoGebra. Amati bentuk grafik yang terbentuk, apakah sesuai dengan Gambar 1?

Answers

Bandingkan titik potong sumbu- x hasil perhitunganmu di soal nomor 9 dengan kotak "Titik potong sumbu- x " pada GeoGebra. Salah satu titik potongnya bernilai negatif. Menurutmu, apakah nilai ini masuk akal dalam konteks diskon ongkir? Jelaskan.

Answers

TAHAPAN

Tahapan General

Hitung titik tengah dari kedua titik potong sumbu- x (-2 dan 10). Bandingkan hasilnya dengan nilai x pada titik puncak yang kamu peroleh di Bagian A. Apa yang kamu temukan?

Answers

Tarik garis bayangan tegak lurus melalui titik puncak pada grafikmu. Menurutmu, apa yang istimewa dari garis tersebut terhadap bentuk kurva secara keseluruhan, dan terhadap kedua titik potong sumbu- x ?

Answers



Question

Bandingkan nilai $P(x)$ pada $x=3$ dengan $x=5$. Apakah hubungan ini juga berlaku untuk pasangan nilai lain yang berjarak sama dari ?

Answers

TAHAPAN

Tahapan Formal

Titik tertinggi pada grafik fungsi kuadrat disebut titik puncak. Tuliskan koordinat titik puncak dari fungsi $P(x)$, dan jelaskan artinya dalam konteks diskon ongkir dan untung toko.

Answers

Garis bayangan tegak lurus yang melewati titik puncak disebut sumbu simetri. Tuliskan persamaan sumbu simetri dari grafikmu.

Answers

Titik-titik saat grafik memotong sumbu- x disebut titik potong sumbu- x . Tentukan titik potong sumbu- x dari fungsi $P(x)$, lalu jelaskan mana di antara kedua titik tersebut yang bermakna dalam konteks (dan mana yang tidak, karena diskon ongkir tidak mungkin bernilai negatif).

Answers



Kesimpulan

Grafik fungsi kuadrat berbentuk parabola, dengan titik puncak di , dan titik potong sumbu- x (jika ada) di , dengan $D = b^2 - 4ac$ disebut Diskriminan. Sumbu simetri adalah garis vertikal yang melewati titik puncak, terletak tepat di tengah-tengah kedua titik potong sumbu- x . Pada konteks diskon ongkir Toko Pempek Cek Minah, titik puncak (4, 108) menunjukkan bahwa untung maksimal sebesar Rp108.000/hari tercapai pada diskon ongkir Rp4.000. Perlu diperhatikan bahwa tidak semua titik potong sumbu- x selalu bermakna dalam konteks nyata nilai x harus diperiksa kembali kesesuaiannya dengan situasi yang dimodelkan.