Тригонометричні вирази. Завдання ЗНО/НМТ

Функція	**0°**	**30°**	**45°**	**60°**	**90°**	**180°**	**270°**
sin	0			$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	не існує	0	не існує
ctg	не існує	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	не існує	0

<u>Знаходження значень невідомих тригонометричних функцій за відомими:</u>

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha = 1$

$tg\alpha ctg\alpha = 1$

$1+tg^2\alpha = \frac{1}{cos^2\alpha}$

$1+ctg^2\alpha = \frac{1}{sin^2\alpha}$

$tg\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha}$

$ctg\alpha = \frac{cos\alpha}{sin\alpha}$

<u>Тригонометричні функції суми кутів:</u>

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta$

$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$

$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta$

$tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha tg\beta}$

$tg(\alpha-\beta) = \frac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha tg\beta}$

<u>Формули зведення:</u>

1. Визначити знак функції для даного кута.

Функція	**(0,90°)**	**(90°,180°)**	**(180°,270°)**	**(270°,360°)**
sin	+	+	-	-
cos	+	-	-	+
tg,ctg	+	-	+	-

2. Якщо перехід здійснено через π, 2π функцію залишаємо; якщо ні - то замінюємо на відповідну з пари (sin,cos), (tg,ctg)

<u>Тригонометричні функції подвійного аргументу:</u>

$\sin2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$

$\cos2\alpha = \cos^2\alpha-\sin^2\alpha$

$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta$

LIVEWORKSHEETS

$tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$

Сума та різниця тригонометричних функцій:

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

Формули половинного аргументу:

$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - cos\alpha}{2}$

$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 + cos\alpha}{2}$

$tg^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - cos\alpha}{1 + cos\alpha}$

1. **2021.** $\frac{7 - (sin^2\beta + cos^2\beta)}{3sin^2\beta + 3cos^2\beta} = ?$

А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
$\frac{7}{6}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{8}{3}$	12	2

Д.

$\frac{7 - (sin^2\beta + cos^2\beta)}{3sin^2\beta + 3cos^2\beta} = \frac{7-1}{3(sin^2\beta + cos^2\beta)} = \frac{6}{3} = 2.$

2. **2021.** $\sin^2 2x =$

А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
$2\sin^2 x$	$4\sin^2 x$	$4\sin^2 x\cos^2 x$	$2\sin^2 x\cos^2 x$	$\sin 4x^2$

В.

$\sin^2 2x = (2\sin x\cos x)^2 = 4\sin^2 x\cos^2 x$.

3. **2021.** Спростіть вираз $2\cos(450^o + \alpha) - \sin\alpha$.

А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
$\sin\alpha$	$-3\sin\alpha$	$-2\cos\alpha - \sin\alpha$	$2\cos\alpha - \sin\alpha$	$3\sin\alpha$

Б.

$2\cos(450^o + \alpha) - \sin\alpha = 2\cos((360^o + 90^o) + \alpha) - \sin\alpha = 2\cos(90^o + \alpha) - \sin\alpha = -2\sin\alpha - \sin\alpha = -3\sin\alpha$.

LIVEWORKSHEETS

4. **2020.** $\frac{cos\alpha tg\alpha}{sin^2\alpha}$ = ?

А	Б	В	Г	Д
sinα	$\frac{1}{sin^2\alpha}$	$\frac{1}{sin\alpha}$	cosα	1

В.

$\frac{cos\alpha tg\alpha}{sin^2\alpha} = \frac{cos\alpha\frac{sin\alpha}{cos\alpha}}{sin^2\alpha} = \frac{sin\alpha}{sin^2\alpha} = \frac{1}{sin\alpha}.$

5. **2019.** Якому проміжку належить значення виразу sin $\frac{7\pi}{6}$ -1?

А	Б	В	Г	Д
(-∞;-2)	[-2;-1)	[-1;0)	[0;1)	[1;+∞)

Б.

sin $\frac{7\pi}{6}$ -1 = sin $\frac{6\pi+\pi}{6}$ -1 = sin(π+$\frac{\pi}{6}$)-1 = -sin$\frac{\pi}{6}$-1 = -0,5-1 = -1,5. Дане число належить проміжку [-2;-1).

6. Обчисліть значення виразу $4\sin^2\alpha$, якщо $4\cos^2\alpha = 1$.

А	Б	В	Г	Д
3	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	4	0

А.

Якщо основну тригонометричну тотожність помножити на 4, то маємо $4\sin^2\alpha+4\cos^2\alpha = 4$. Підставивши у цю рівність замість $4\cos^2\alpha$ 1 отримуємо $4\sin^2\alpha+1 = 4$. Звідси $4\sin^2\alpha = 3$.

7. **2020.** Спростіть вираз $(1+tg^2\alpha)\sin^2\alpha$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{tg^2\alpha}$	1	$\cos^2\alpha\sin^2\alpha$	$\cos^2\alpha$	$tg^2\alpha$

Д.

$(1+tg^2\alpha)\sin^2\alpha = \frac{1}{cos^2\alpha}\sin^2\alpha = \frac{sin^2\alpha}{cos^2\alpha} = tg^2\alpha.$

8. **2019.** Спростіть вираз $2\sin^2\alpha\cdot ctg\alpha$.

А	Б	В	Г	Д
cos2α	2cos2α	$\frac{2sin^3\alpha}{cos\alpha}$	2sin2α	sin2α

LIVEWORKSHEETS

Д.
$2\sin^2\alpha\cdot ctg\alpha = 2\sin^2\alpha\cdot(\cos\alpha:\sin\alpha) = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha = \sin2\alpha$.

9. $\frac{cos(90^o+\alpha)}{sin\alpha} = ?$

А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
-1	ctgα	tgα	-ctgα	1

А.
$\frac{cos(90^o+\alpha)}{sin\alpha} = \frac{-sin\alpha}{sin\alpha} = -1$.

10. Обчисліть значення виразу sinα+sinβ, якщо $\alpha-\beta = 180^0$.

А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	інша

В.
З рівності $\alpha-\beta = 180^0$ маємо $\alpha = 180^0+\beta$. За формулами зведення $\sin\alpha = \sin(180^0+\beta) = -\sin\beta$. Тоді $\sin\alpha+\sin\beta = -\sin\beta+\sin\beta = 0$.

11. 1-sinαctgαcosα =

А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
cos2α	1-sin2α	0	$\cos^2\alpha$	$\sin^2\alpha$

Д.
$1-\sin\alpha ctg\alpha\cos\alpha = 1-\sin\alpha\frac{cos\alpha}{sin\alpha}\cos\alpha = 1-\cos\alpha\cdot\cos\alpha = 1-\cos^2\alpha = \sin^2\alpha$.

12. $1-\sin^2\alpha-\cos^2\alpha =$

А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
-2	0	1	$2\cos^2\alpha$	1+cos2α

Б.
$1-\sin^2\alpha-\cos^2\alpha = 1-(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha) = 1-1 = 0$.

13. **2019.** $(1-\sin^2\alpha)\cdot tg^2\alpha$.

А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
sin2α	cos2α	$\frac{cos^4\alpha}{sin^2\alpha}$	$\sin^2\alpha$	$ctg^2\alpha$

LIVEWORKSHEETS

Г.
$(1-\sin^2\alpha)\cdot tg^2\alpha = \cos^2\alpha\cdot tg^2\alpha = \cos^2\alpha\cdot(\sin^2\alpha:\cos^2\alpha) = \sin^2\alpha$.

14. $(1-\cos^2\alpha)\cdot ctg^2\alpha$.

А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
$\cos^2\alpha$	$\sin 2\alpha$	$\frac{sin^4\alpha}{cos^2\alpha}$	$\sin^2\alpha$	$tg^2\alpha$

А.
$(1-\cos^2\alpha)\cdot ctg^2\alpha = \sin^2\alpha\cdot ctg^2\alpha = \sin^2\alpha\cdot(\cos^2\alpha:\sin^2\alpha) = \cos^2\alpha$.

15. Спростіть вираз $\frac{1}{1+tg^2\alpha}$.

А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
$\cos^2\alpha$	$\sin^2\alpha$	$tg^2\alpha$	$ctg^2\alpha$	1

А.
$\frac{1}{1+tg^2\alpha} = \frac{1}{\frac{1}{cos^2\alpha}} = \cos^2\alpha$.

16. Спростіть вираз $\sin^2\alpha(1-ctg^2\alpha)$.

А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
$\cos(2\alpha)$	$tg^2\alpha$	1	$ctg^2\alpha$	$-\cos(2\alpha)$

Д.
$\sin^2\alpha(1-ctg^2\alpha) = \sin^2\alpha(1-\frac{cos^2\alpha}{sin^2\alpha}) = \sin^2\alpha\cdot\frac{sin^2\alpha-cos^2\alpha}{sin^2\alpha} = \sin^2\alpha-\cos^2\alpha = -(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha) = -\cos 2\alpha$.

17. Яка з наведених рівностей є тотожністю?

А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
$\sin^4\alpha+\cos^4\alpha = 1$	$\sin\alpha+\cos\alpha = 1$	$1+\cos^2\alpha = \sin^2\alpha$	$\sin^2\alpha-1 = \cos^2\alpha$	$1-\cos^2\alpha = \sin^2\alpha$

Д.
Випливає з основної тригонометричної тотожності.

18. **2020.** Якщо $2\cos\alpha-5\sin\alpha = 0$, то $tg\alpha =$

А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{-5}$	-3	$\frac{5}{-2}$	$\frac{5}{2}$

LIVEWORKSHEETS

А.
З даної рівності маємо 5sinα = 2cosα. Поділивши ліву і праву частину на 5cosα, маємо tgα = $\frac{2}{5}$.

19. Обчисліть tgα, якщо 4sinα-cosα = 2cosα-sinα.

А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	3	$\frac{5}{3}$

А.
З даної рівності маємо 5sinα = 3cosα. Поділивши ліву і праву частину на 5cosα, маємо tgα = $\frac{3}{5}$.

20. Якщо 2sinα = cosα, то tgα =

А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
-2	-0,5	0,2	0,5	2

Г.
Поділивши ліву і праву частину на 2cosα, маємо tgα = $\frac{1}{2}$ = 0,5.

21. Обчисліть $\cos^4\frac{\pi}{12}-\sin^4\frac{\pi}{12}$

А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	Інша

Б.
$\cos^4\frac{\pi}{12}-\sin^4\frac{\pi}{12} = \cos^{22}\frac{\pi}{12}-\sin^{22}\frac{\pi}{12} = (\cos^2\frac{\pi}{12}-\sin^2\frac{\pi}{12})(\cos^2\frac{\pi}{12}+\sin^2\frac{\pi}{12}) = \cos^2\frac{\pi}{12}-\sin^2\frac{\pi}{12} = \cos^{2\cdot\frac{\pi}{12}} = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

22. Обчисліть значення виразу $\sin\frac{7\pi}{2}$ +cos5π.

А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
-2	1	0	1	2

LIVEWORKSHEETS

А.

$\sin\frac{7\pi}{2}+\cos5\pi = \sin\frac{4\pi+3\pi}{2}+\cos(4\pi+\pi) = \sin(2\pi+\frac{3\pi}{2})+\cos\pi = \sin\frac{3\pi}{2}+\cos\pi = -1-1 = -2$.

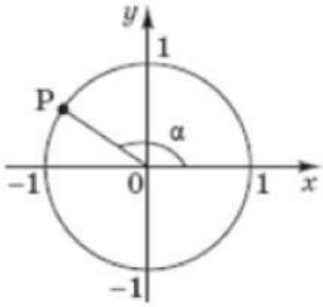
23. Якому проміжку належить значення виразу $\sin410^0$?

А	Б	В	Г	Д
$(-1;-\frac{1}{2})$	$\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$(\frac{\sqrt{3}}{2};1)$

Г.

$\sin410^0 = \sin(360+50)^0 = \sin50^0$. Оскільки кут 50^0 належить першій чверті, де функція $y = \sin\alpha$ зростаюча, то з нерівності $45^0<50^0<60^0$ маємо $\sin45^0<\sin50^0<\sin60^0$. Отже $\frac{\sqrt{2}}{2}<\sin410^0<\frac{\sqrt{3}}{2}$.

24. На одиничному колі зображено точку P(-0,8;0,6) і кут α (див. рисунок). Визначте cosα.



А	Б	В	Г	Д
-0,8	0,6	0,8	-0,6	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$

А.

Оскільки cosα відповідає абсцисі (першій координаті) точки P, то cosα = -0,8.

25. Розташуйте в порядку зростання числа: $a = tg36^0$, $b = tg93^0$, $c = tg180^0$.

А	Б	В	Г	Д
b; c; a	c; b; a	a; b; c	c; a; b	b; a; c

А.

$c = tg180^0 = 0$. Так як кут 36^0 належить першій чверті, то $tg36^0>0$. Так як кут 93^0 належить другій чверті, то $tg93^0<0$. Оскільки за зростанням

LIVEWORKSHEETS

спочатку йдуть від'ємні числа, потім 0, потім додатні числа, то маємо $tg93^0$; $tg180^0$;$tg36^0$.

26. Укажіть правильну нерівність, якщо $a = \sin120^0$, $b = \cos120^0$.

А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
$0<b<a$	$a<0<b$	$a<b<0$	$0<a<b$	$b<0<a$

Д.
Так як кут 120^0 належить другій чверті, то $\sin120^0>0$, а $\cos120^0<0$. Тоді $\cos120^0<0<\sin120^0$.

27. Укажіть нерівність, що виконується для $\alpha\in(\frac{\pi}{2};\pi)$.

А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
$1-\sin^2\alpha<0$	$\cos\alpha\cdot tg\alpha<0$	$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha<0$	$1-\cos^2\alpha<0$	$\sin\alpha\cdot ctg\alpha<0$

Д.
$1-\sin^2\alpha = \cos^2\alpha>0$. $\cos\alpha\cdot tg\alpha = \sin\alpha>0$ (в другій чверті синус додатній). $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha = 1>0$. $1-\cos^2\alpha = \sin^2\alpha>0$. $\sin\alpha\cdot ctg\alpha = \cos\alpha<0$ (в другій чверті косинус від'ємний).

28. Відомо, що $ctg\alpha<0$, $\cos\alpha>0$. Якого значення може набувати $\sin\alpha$?

А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1

Б.
Оскільки $ctg\alpha<0$, $\cos\alpha>0$, то кут належить 4 чверті, де синус від'ємний.

Маємо два від'ємних значення -1 та $-\frac{1}{2}$, але при $\sin\alpha = -1$ $\cos\alpha = 0$ (з основної тригонометричної тотожності), що суперечить умові. Отже $\sin\alpha = -\frac{1}{2}$.

29. До кожного виразу (1-4) доберіть тотожно йому рівний (А-Д).

Запитання	*на запитання*
1 $1-\cos^2\alpha$ **2** $2\sin\alpha\cos\alpha$ **3** $\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$ **4** $(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)$	**А** $\cos^2\alpha$ **Б** $\cos2\alpha$ **В** $\sin2\alpha$ **Г** $-\cos2\alpha$ **Д** $\sin^2\alpha$

1-Д, 2-В, 3-Б, 4-А .
1) $1-\cos^2\alpha = \sin^2\alpha$.

LIVEWORKSHEETS

2) $2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$.
3) $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha$.
4) $(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha) = 1-\sin^2\alpha = \cos^2\alpha$.

30. Знайдіть значення виразу $tg\alpha + ctg\alpha$, якщо $\alpha = 15^0$.

$tg\alpha + ctg\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha} + \frac{cos\alpha}{sin\alpha} = \frac{sin^2\alpha + cos^2\alpha}{cos\alpha \cdot sin\alpha} = \frac{1}{\frac{1}{2}sin(2\cdot\alpha)} = \frac{1}{\frac{1}{2}sin(2\cdot 15^0)} = \frac{1}{\frac{1}{2}sin30^0} = \frac{1}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4.$

31. Обчисліть $2\sqrt{13}cos\left(arctg\frac{2}{3}\right)$.

Нехай $arctg\frac{2}{3} = x$. Тоді ми маємо, що потрібно знайти значення $2\sqrt{13}cosx$. З першої рівності маємо $\frac{2}{3} = tgx$. Підставимо це значення у тотожність $1+tg^2x = \frac{1}{cos^2x}$. Отримаємо:

$$1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{cos^2x}$$
$$1 + \frac{4}{9} = \frac{1}{cos^2x}$$
$$\frac{13}{9} = \frac{1}{cos^2x}$$
$$\frac{9}{13} = cos^2x$$
$$cosx = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

Підставивши це значення у завдання маємо $2\sqrt{13}cosx = 2\sqrt{13}\cdot\frac{3}{\sqrt{13}} = 6.$

32. Обчисліть значення виразу $\sin 2\alpha$, якщо $ctg\alpha = \frac{-1}{2}$.
-0,8.
$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$
$= \frac{2sin\alpha\cdot cos\alpha}{1} = \frac{\frac{2sin\alpha\cdot cos\alpha}{sin^2\alpha}}{\frac{1}{sin^2\alpha}} = \frac{\frac{2cos\alpha}{sin\alpha}}{1+ctg^2\alpha} = \frac{2ctg\alpha}{1+ctg^2\alpha} = \frac{2\cdot\frac{-1}{2}}{1+\left(\frac{-1}{2}\right)^2} = \frac{-1}{1+\frac{1}{4}} = \frac{-1}{\frac{5}{4}} = -\frac{4}{5} = -0{,}8.$

LIVEWORKSHEETS

33. Обчисліть значення виразу $2\sin\alpha\cos\alpha$, якщо $\sin\alpha+\cos\alpha = 1{,}2$.

0,44.

$\sin\alpha+\cos\alpha = 1{,}2$. Піднесемо до квадрату обидві частини рівності.

$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2 = 1{,}2^2$

$\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha = 1{,}44$

$(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)+2\sin\alpha\cos\alpha = 1{,}44$

$1+2\sin\alpha\cos\alpha = 1{,}44$

$2\sin\alpha\cos\alpha = 1{,}44-1$

$2\sin\alpha\cos\alpha = 0{,}44$.

LIVEWORKSHEETS