
Naomi Machicela
2do BGU 'A'
Licenciado Tupac Vallejo
Asignatura Matemática
Dola AI

Este documento constituye la sistematización integral de mis apuntes de estudio y desarrollo de investigaciones avanzadas en cálculo diferencial. El contenido se redacta en primera persona, priorizando la síntesis teórica, la precisión matemática y las analogías sensoriales necesarias para garantizar un dominio absoluto del área.

1. CONCEPTO GENERAL DE LÍMITES

En términos sencillos, entiendo el límite como el valor al que una función se acerca a medida que la variable independiente se aproxima a un punto determinado, sin importar lo que ocurra realmente en dicho punto exacto. Es la herramienta fundamental que me permite comprender el comportamiento de las funciones cuando se acercan a regiones indeterminadas o "prohibidas" (como las divisiones para cero) o cuando se evalúa su tendencia hacia el infinito.

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

MI SENSOPERCEPCIÓN DEL LÍMITE (FIGURA HUMANA)

Visualizo mi propio cuerpo caminando en línea recta hacia una pared o barrera infranqueable. A medida que avanzo, doy pasos cada vez más cortos de forma infinita, rozando la superficie sin llegar a atravesarla o chocar formalmente. Esto me recuerda que en el límite no me interesa evaluar la posición exacta en el punto de conflicto f(a), sino analizar hacia dónde apunta la trayectoria de mi movimiento continuo.

LA REGLA DE ORO DE LOS LÍMITES

Para que un límite exista en un punto determinado, debe haber un acuerdo absoluto entre ambos lados. Esto implica que el límite por la izquierda debe ser exactamente igual al límite por la derecha. Si ambos lados apuntan a valores diferentes, concluyo firmemente que el límite no existe.

Importancia del Límite en el Cálculo

Comprendo que el límite es el bloque de construcción básico del análisis matemático estructural. Sin él, sería imposible conceptualizar:

- **La Continuidad:** Determinar rigurosamente si una función se puede dibujar de forma continua sin levantar el lápiz del papel.
- **La Derivada:** Medir la razón de cambio instantánea de una variable (un límite donde el intervalo de tiempo o distancia tiende a cero).

- **Las Asíntotas:** Estudiar con precisión el comportamiento asintótico de una curva cuando se proyecta hacia el infinito.

Ejemplo Demostrativo de Indeterminación:

$$f(x) = \frac{x2 - 1}{x - 1}, \text{ con } x \neq 1$$

Sustitución directa: $\lim_{x \to 1} = \frac{12 - 1}{1 - 1} = \frac{0}{0}$ *(Indeterminación)*

Resolución algebraica mediante factorización:

$$\lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} (x + 1) = 1 + 1 = 2$$

2. LÍMITES LATERALES

Los límites laterales son la herramienta analítica que utilizo para inspeccionar el comportamiento de una función *f(x)* desde direcciones específicas. Esto me permite separar el análisis según la orientación del acercamiento en el eje de las abscisas.

- **Límite por la izquierda ($x \to a^-$):** Representa el valor al que se aproxima la función tomando valores de x ligeramente menores que a.
- **Límite por la derecha ($x \to a^+$):** Representa el valor al que se aproxima la función tomando valores de x ligeramente mayores que a.

Ejemplo de Función Definida a Trozos: $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x < 2 \\ 5 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

3. LÍMITES CON VALOR ABSOLUTO

Trabajar con límites que involucran barras de valor absoluto requiere romper la función en partes. El valor absoluto representa una función analítica definida a trozos, por lo que evaluar los límites laterales se vuelve una obligación metodológica.

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

MI SENSOPERCEPCIÓN DEL VALOR ABSOLUTO (FILTRO DE DISTANCIAS)

Percibo el valor absoluto como un instrumento geométrico rígido, equivalente a medir longitudes en el entorno real con una cinta métrica (las distancias negativas no tienen sentido físico). Al evaluar límites, mi mente detecta un punto crítico y bifurca el camino: si vengo desde los negativos, aplico un signo menos operativo para corregir y positivar la distancia; si vengo de los positivos, retiro las barras con total libertad.

Mi protocolo sistemático de resolución: (1) Identificar el punto crítico que anula el interior del valor absoluto. (2) Evaluar rigurosamente el comportamiento por la izquierda. (3) Evaluar por la derecha. (4) Comparar los resultados laterales para validar la existencia del límite general.

Ejercicio Transcrito	Resolución Analítica Paso a Paso
$\lim_{x \to 0} \frac{\lvert x \rvert}{x}$	**PASO 1: ANÁLISIS LATERAL** *Por la izquierda ($x \to 0-$): $\lvert x \rvert = -x$* $\lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$ *Por la derecha ($x \to 0+$): $\lvert x \rvert = x$* $\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1$ *Como $-1 \neq 1$, el límite general no existe.*
$\lim_{x \to -2} \frac{\lvert x2 - 4 \rvert}{x + 2}$ *Evaluación inicial:* $\frac{\lvert(-2)2 - 4\rvert}{-2 + 2} = \frac{0}{0}$	**PASO 1: LÍMITE POR LA IZQUIERDA($X \to -2$) $^-$** Para valores menores a -2, $x^2 - 4 > 0$, por lo tanto $\lvert x^2 - 4 \rvert = x2 - 4$. (Nota: en mis apuntes originales se aplicó el signo cambiado por un análisis local invertido): $\lim_{x \to -2^-} \frac{-(x - 2)(x + 2)}{x + 2} = -(-2 - 2) = 4$ **PASO 2: LÍMITE POR LA DERECHA ($X \to -2+$)** $\lim_{x \to -2^+} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x + 2} = -2 - 2 = -4$

Ejercicio Transcrito	Resolución Analítica Paso a Paso
	Dado que $4 \neq -4$, el límite general no existe.
$\lim_{x \to 0} \frac{\lvert x+2\rvert - \lvert x-2\rvert}{x}$	**PASO1:ROMPERBARRASEN EL ENTORNO DE X = 0** *Si x está muy cerca de 0:* $\lvert x+2\rvert = x + 2$ $\lvert x-2\rvert = -(x-2)$ **PASO 2: SUSTITUCIÓN Y SIMPLIFICACIÓN** $\lim_{x \to 0} \frac{(x+2) - [-(x-2)]}{x}$ $= \lim_{x \to 0} \frac{x+2+x-2}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{2x}{x} = \lim_{x \to 0} 2 = 2$

4. LÍMITES CON RAÍCES (RACIONALIZACIÓN)

Para disolver las indeterminaciones de tipo $0/0$en expresiones que contienen raíces cuadradas, el mecanismo algebraico óptimo es la racionalización, fundamentada en la diferencia de cuadrados perfectos.

$$(a+b)(a-b) = a2 - b2$$

MI SENSOPERCEPCIÓN DE LAS RAÍCES (EL RACIMO DE UVAS)

En mis diagramas asocio la raíz con la estructura de un racimo de uvas √uvas. La raíz actúa como una corteza protectora que aprisiona la variable y bloquea la operación matemática directa. Multiplicar por el conjugado representa la herramienta mecánica exacta para pelar esa corteza a través del desarrollo de una diferencia de cuadrados, liberando la variable para su simplificación terminal.

Problema con Radicales	Resolución Analítica Paso a Paso
$\lim_{x \to 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$	**PASO 1: MULTIPLICAR POR EL CONJUGADO** *Conjugado del denominador = $\sqrt{x} + 2$*

Problema con Radicales	Resolución Analítica Paso a Paso
	$\lim_{x\to 4} \frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$ **PASO2:DIFERENCIADE CUADRADOS** $(\sqrt{x})2 - 22 = x - 4$ $\lim_{x\to 4} \frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{x-4}$ **PASO3: CANCELACIÓNYEVALUACIÓN** $= \lim_{x\to 4} (\sqrt{x}+2) = \sqrt{4}+2 = 2+2 = 4$
$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$	**PASO 1: RACIONALIZAR NUMERADOR** $\lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}$ **PASO2:DESARROLLAR NUMERADOR** $(\sqrt{x})2 - 12 = x - 1$ $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}$ **PASO 3: EVALUACIÓN FINAL** $= \lim_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{\sqrt{1}+1} = \frac{1}{2}$

5. LÍMITES CON LOGARITMOS

La resolución eficaz de límites de carácter logarítmico exige un dominio sólido de sus propiedades operacionales e identidades de límites notables.

Propiedades Esenciales de los Logaritmos:

- **Producto:** *logb(x · y) = logb(x) + logb(y)*
- **Cociente:** *logb(x / y) = logb(x) − logb(y)*
- **Potencia:** *logb(xⁿ) = n · logb(x)*

MI SENSOPERCEPCIÓN LOGARÍTMICA (RELIEVE DEL TERRENO)
Asocio el perfil gráfico del logaritmo natural ln(x) con la topografía de un terreno extremo. Cuando x se expande hacia el infinito masivo (x → ∞), me percibo escalando una ladera interminable que se vuelve progresivamente más plana y lenta. Cuando x se reduce hacia cero por la derecha (x → 0+), experimento una caída libre vertical hacia un abismo infinitamente profundo (−∞). Esta imagen me permite anticipar las tendencias límites antes de calcular.

Límites Notables con Logaritmos:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to \infty} x \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$$

6. INVESTIGACIÓN ESPECIALIZADA: INDUCCIÓN A LA DERIVADA

Como culminación metodológica de mi estudio exhaustivo sobre límites, esta sección condensa la investigación formal del concepto de derivada, marcando la transición definitiva hacia el Cálculo Diferencial.

Definición Conceptual

Establezco con total claridad que la derivada representa de forma resumida la **tasa de cambio instantánea** de una función. Mientras que el álgebra elemental me permite evaluar variaciones promedio (como la velocidad media de un trayecto), la derivada me otorga el poder matemático de conocer el comportamiento exacto de un fenómeno en un instante infinitesimal o milisegundo específico.

Interpretación Geométrica

Al proyectar una función sobre un plano cartesiano, deduzco que la derivada de una curva en un punto específico es idéntica a la **pendiente de la recta tangente** a dicha curva en ese punto exacto. En consecuencia, esta línea recta roza la gráfica en una única coordenada y me revela de forma visual inmediata si la función está creciendo, decreciendo o manteniéndose estacionaria en dicho fragmento de su dominio.

Definición Formal por Límites

La derivada se define formalmente como el límite del cociente de diferencias racionales a medida que el incremento de la variable independiente (*h* o *Δx*) tiende a cero. Esta expresión matemática consolida la unión
entre mis apuntes previos de límites y el cálculo diferencial:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Al ejecutar analíticamente esta ecuación, observo que recurrentemente se manifiesta una indeterminación clásica de la forma *0/0*. Su resolución exitosa requiere la aplicación sistemática de los mismos métodos desarrollados a lo largo de este portafolio: factorización de polinomios, racionalización por expresiones conjugadas o simplificación algebraica avanzada.

Campos de Aplicación y Conclusión

Considero que comprender la inducción a la derivada es un requisito indispensable para mi desarrollo académico. No representa un ejercicio meramente abstracto, sino que constituye la base para abordar problemas críticos de **optimización** (como la determinación de utilidades máximas o costos mínimos en un modelo de negocios corporativo), la tasa de rendimiento marginal y la descripción de variables físicas fundamentales como la velocidad instantánea y la aceleración.

7. AUTOEVALUACIÓN (VERDADERO / FALSO)

Para asegurar que mi evaluación obtenga la nota máxima y comprobar mi dominio técnico, he formulado estas sentencias de verificación rápida, divididas por cada bloque teórico.

Concepto General de Límites

1. El límite de una función en un punto siempre es igual al valor exacto que toma la función evaluada en ese punto, incluso si hay una división por cero. **(Falso)**

2. Para que un límite exista matemáticamente, es un requisito indispensable que tanto el límite por la izquierda como el límite por la derecha apunten exactamente al mismo valor. **(Verdadero)**

Límites Laterales

1. El símbolo matemático ($x \to a-$) indica que me estoy aproximando al valor "a" tomando números que son ligeramente mayores que "a". **(Falso)**

2. En una función definida a trozos, es estrictamente obligatorio evaluar los límites laterales si el punto crítico que busco coincide con el cambio de la regla de la función. **(Verdadero)**

Límites con Valor Absoluto

1. Al evaluar un límite con $|x|$ cuando x se acerca por la izquierda ($x \to 0-$), las barras de valor absoluto se quitan y la expresión se reemplaza obligatoriamente por -x. **(Verdadero)**

2. Si al resolver una función con valor absoluto descubro que el límite lateral izquierdo es 4 y el límite lateral derecho es -4, puedo concluir matemáticamente que el límite general es 0. **(Falso)**

Límites con Raíces (Racionalización)

1. El propósito principal de multiplicar una fracción por su expresión conjugada es eliminar las raíces del numerador o denominador forzando la creación de una diferencia de cuadrados. **(Verdadero)**

2. El conjugado exacto de la expresión ($\sqrt{x} - 2$) es la misma expresión sin alterar sus signos, es decir, ($\sqrt{x} - 2$). **(Falso)**

Límites con Logaritmos

1. Gráficamente, cuando evaluamos el límite del logaritmo natural acercándose a cero por la derecha ($x \to 0+$), la función cae verticalmente y tiende hacia $-\infty$. **(Verdadero)**

2. Según las propiedades algebraicas, el logaritmo de un producto se transforma en el producto de los logaritmos. **(Falso)**

Inducción a la Derivada

1. Geométricamente, el valor de la derivada en un punto específico representa la pendiente de una recta secante que corta a la función en dos puntos distintos. **(Falso)**

2. La fórmula formal de la derivada nace del cálculo de un límite donde el incremento o la distancia horizontal (h) tiende a cero. **(Verdadero)**

ELABORADO POR: naomimachiselamk2009.@gmail.com

LIVEWORKSHEETS