CUADERNO DE MATEMÁTICAS

LÍMITES

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

Análisis Gráfico de Aproximaciones Laterales

$x \to c^{-}$ • $x \to c^{+}$

$\infty \quad \leftrightarrow \quad \varnothing \quad \leftrightarrow \quad \Delta$

Estudiante:

Yuly Fernanda Oto Riera

Curso:

Segundo de Bachillerato "B"

Desarrollo de Temas de Cálculo

1. Límite con Valor Absoluto

SENSOPERCEPCIÓN:

🍎 ——→ *lim* ——→ 🍇 ——→ *f(* 🍎 *)*

¿A qué valor se aproxima una función cuando x tiende a un punto, manejando la magnitud sin importar el signo (distancia al 0)? Su concepto clave es definir el valor absoluto como una función a trozos, escribiendo $|x - a|$ como $x - a$ (si $x \geq a$) o bien $-(x - a)$ (si $x < a$).

Definición

Representa la distancia a 0:

$$|x| = x \quad \text{si } x \geq 0$$
$$|x| = -x \quad \text{si } x < 0$$

Indeterminación

A menudo estos límites producen formas indeterminadas de tipo $0/0$, requiriendo analizar los límites laterales.

Límites laterales: Debido a que la definición cambia de signo se deben calcular los límites por la izquierda ($x \to a^-$) y por la derecha ($x \to a^+$).

Existencia de límites: El límite general existe si y sólo si los límites laterales son iguales.

Ejemplo Práctico Desarrollado:

$$\lim_{x \to 3} ¼\, |x - 3| / (x - 3)$$

- **Por la derecha ($x \to 3^+$):** $|x - 3| = (x - 3)$
  $\lim_{x \to 3^+} ¼\, (x - 3) / (x - 3) = ¼\, (1) = ¼$
- **Por la izquierda ($x \to 3^-$):** $|x - 3| = -(x - 3)$
  $\lim_{x \to 3^-} ¼\, [-(x - 3)] / (x - 3) = ¼\, (-1) = -¼$

Resultado: Como los límites laterales son distintos ($¼ \neq -¼$), el límite general **no existe**.

Pregunta 1:

¿Cuál es el resultado del límite general evaluado en este ejercicio?

A) El límite es $¼$

B) El límite es $-¼$

C) El límite no existe.

D) El límite es 0

2. Límites con Raíces

SENSOPERCEPCIÓN:

$$\lim_{x \to \text{🍇}} \left[(\sqrt{x} - 3) / (x - 3) \right]$$

Para resolver límites que involucran raíces, especialmente cuando resultan en la indeterminación 0/0, el método más efectivo es la racionalización.

Concepto clave: El conjugado

La idea es eliminar la raíz del numerador o denominador usando la diferencia de cuadrados:

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

Si tienes raíz de x menos a, el conjugado sería raíz de x más a:

$$(\sqrt{x} - a)(\sqrt{x} + a)$$
$$((\sqrt{x})^2 - a^2)$$
$$(x - a^2)$$

Pasos para resolver:

1. Evaluar y sustituir para encontrar la indeterminación.
2. Multiplicar por el conjugado arriba y abajo.
3. Simplificar aplicando la diferencia de cuadrados.
4. Cancelar términos.
5. Sustituir de nuevo y encontrar el valor final.

Pregunta 2:

¿Qué método se utiliza para eliminar la raíz del numerador o denominador?

A) Racionalización por conjugado.

B) Teorema del emparedado.

C) Sustitución directa por cero.

D) Factorización por aspa simple.

3. Límites con Logaritmos

TRANSCRIPCIÓN COMPLETA Y FIEL DEL CUADERNO:

Sensopercepción 📋

$$Log_b\,(x \cdot y) = Log_b\,x + Log_b\,(y)$$

$$Log_b\,\frac{x}{y} = Log_b\,x - Log_b\,y$$

Límites con logaritmos

Los límites con logaritmo son un clásico, el secreto está en dominar sus propiedades y conocer los límites notables.

Propiedades de los logaritmos

Antes de calcular cualquier límite, a menudo tendrás que acomodar la expresión utilizando estas propiedades:

A) Logaritmo de un producto:

$$Log_b\,(x \cdot y) = Log_b\,x + Log_b\,(y)$$

B) Logaritmo de un cociente:

$$Log_b\,\frac{y}{y} = Log_b\,x - Log_b\,y$$

C) Logaritmo de una potencia:

$$Log_b\,x^n = n\,Log_b\,x$$

Gráfico y Límites de logaritmo

Es fundamental saber cómo se comporta la función logarítmica natural de x ($ln(x)$) en sus extremos, el logaritmo solo existe para números mayores que cero 0.

☆ **Cuando x tiende a infinito:** $Lim_{x \to \infty}\,ln(x) = \infty$

Nota: Crece lentamente pero va al infinito 📋

☆ **Cuando X tiende a 0 por la derecha:** $Lim_{x \to 0}\,ln(x) = -\infty$

Nota: Se pega al eje Y y hacia abajo.

Pregunta 3:

¿A qué equivale el logaritmo de un producto según sus propiedades?

A) A la suma de los logaritmos.

B) A la resta de los logaritmos.

C) A la división de los logaritmos.

D) Al exponente multiplicado.

4. Introducción e Inducción a la Derivada

La derivada nace directamente del concepto de límite para resolver dos problemas fundamentales: encontrar la recta tangente a una curva en un punto y determinar la velocidad instantánea de un objeto.

En el álgebra elemental, la pendiente de una recta entre dos puntos se calcula con:

$$m = (y_2 - y_1) / (x_2 - x_1)$$

Para una curva $y = f(x)$, si tomamos un punto fijo $P(c, f(c))$ y un punto cercano $Q(c + h, f(c + h))$, la pendiente de la recta secante que pasa por ambos es el cociente:

$$m_{secante} = [\ f(c + h) - f(c)\ ] / h$$

A medida que el incremento h se aproxima a cero ($h \to 0$), el punto Q se acerca a P a lo largo de la curva. En el límite, la recta secante se convierte en la recta tangente. Por lo tanto, la pendiente de la recta tangente (la derivada) se define formalmente como el cociente diferencial de Newton:

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} [\ f(c + h) - f(c)\ ] / h$$

Si este límite existe, la función es diferenciable en c. La derivada representa la tasa de cambio instantánea de una función en un instante preciso.