LIBRO DE LOS

LIMITES

Nombre: Martin Rojas
Curso: 2do BGU B
Año
2025-2026

3TRIMESTRE

LIMITES CON VALOR ABSOLUTO

$$\lim_{🍓 \to 1} \frac{|🍓 - 1|}{🍓 - 1}$$

Concepto

Los límites con valor absoluto estudian a qué valor se aproxima una función cuando x tiende a un punto determinado. El valor absoluto representa una distancia al cero, por eso siempre es positivo.

Definición de valor absoluto

$|x| = x$ si $x \geq 0$

$|x| = -x$ si $x < 0$

Límites laterales

En funciones con valor absoluto se deben analizar los límites por la izquierda y por la derecha, ya que la expresión cambia según el signo de x.

Existencia del límite

El límite existe solamente cuando el límite por la izquierda y el límite por la derecha son iguales.

Ejemplo

lim $(|x-3| / (x-3))$ cuando $x \to 3$.

Si $x > 3$, el resultado es 1.

Si $x < 3$, el resultado es -1.

Como los límites laterales son diferentes, el límite no existe.

$$|ab| = |a||b|$$

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$$

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

LÍMITES CON RAÍCES

Los límites con raíces suelen producir indeterminaciones del tipo 0/0.
Para resolverlos se utiliza la racionalización mediante el conjugado.
Concepto del conjugado
La idea principal es eliminar la raíz multiplicando por el conjugado.
$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$

Ejemplo de conjugado

Si tenemos $\sqrt{x} - a$, su conjugado será $\sqrt{x} + a$.
Pasos para resolver límites con raíces

1. Sustituir el valor para verificar si existe indeterminación.
2. Multiplicar por el conjugado.
3. Aplicar diferencia de cuadrados.
4. Simplificar y cancelar términos.
5. Sustituir nuevamente para encontrar el resultado final.

Ejemplo resuelto

Lim $(\sqrt{x} - 2)/(x - 4)$ cuando $x \to 4$.
Al sustituir directamente:
$(\sqrt{4} - 2)/(4 - 4) = 0/0$
Multiplicamos por el conjugado:
$[(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)] / [(x - 4)(\sqrt{x} + 2)]$
Aplicamos diferencia de cuadrados:
$(x - 4) / [(x - 4)(\sqrt{x} + 2)]$
Simplificando:
$1 / (\sqrt{x} + 2)$
Sustituyendo $x = 4$:
$1 / (2 + 2) = \frac{1}{4}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+2}\right)^2 - \left(\sqrt{x^2+x}\right)^2}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+2-(x^2+x)}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2-x}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+x}}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+3}}{7x+5}$$

LÍMITES CON LOGARITMOS

Los límites con logaritmos suelen aparecer en indeterminaciones como 0/0. Para resolverlos es importante utilizar las propiedades de los logaritmos y los límites notables.

$$\lim_{x\to 0^+} \log_a x = -\infty$$
$$\lim_{x\to 1} \log_a x = 0$$
$$\lim_{x\to a} \log_a x = 1$$
$$\lim_{x\to +\infty} \log_a x = +\infty$$

Propiedades de los logaritmos

- Log b (x·y) = Log b(x) + Log b(y)
- Log b (x/y) = Log b(x) − Log b(y)
- Log b (x^n) = n·Log b(x)

Comportamiento de ln(x)

- ln(x) solo existe para valores de x mayores que 0.
- Cuando x → ∞, ln(x) → ∞.
- Cuando x → 0^+, ln(x) → −∞.

Límite notable

lim (x→0) [ln(1+x) / x] = 1

Pasos para resolver límites con logaritmos

1. Calcular la indeterminada
2. Aplicar propiedades de los logaritmos para simplificar.
3. Utilizar límites notables cuando sea posible.
4. Simplificar la expresión obtenida.
5. Sustituir nuevamente para obtener el resultado final.

INDUCCIÓN A LA DERIVADA

$$f(\square) = 3\square^4 + 2\square - 5$$

.

Concepto de Derivada

La derivada representa la razón de cambio instantánea de una función. También puede interpretarse como la pendiente de la recta tangente a una curva.

Interpretación Geométrica

Geométricamente, la derivada indica la pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función en un punto determinado.

Definición de la Derivada

f'(x) = lim(h→0) [f(x+h) − f(x)] / h

Pasos para Calcular una Derivada por Definición

1. Identificar la función f(x).
2. Calcular f(x+h).
3. Sustituir en la fórmula de la derivada.
4. Simplificar la expresión.
5. Calcular el límite cuando h tiende a cero.

Ejemplo

Sea la función f(x) = x^2.

f(x+h) = $(x+h)^2$

f(x+h) = $x^2 + 2xh + h^2$

Al aplicar la definición de derivada se obtiene:

f'(x) = 2x

1. *Hallar* f'', *si* $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+1}$

Solución:

$$f'(x)=\frac{(x+1)\,(2x-1)'-(2x-1)\,(x+1)'}{(x+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{(x+1)\cdot 2-(2x-1)\cdot 1}{(x+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2x+2-2x+1}{(x+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{3}{(x+1)^2}$$

$$f'(x)=3(x+1)^{-2}$$

$$f''(x)=3\cdot -2(x+1)^{-3}(x+1)'$$

$$f''(x)=-6(x+1)^{-3}\cdot 1$$

$$f''(x)=-6(x+1)^{-3}$$

Aplicaciones de la Derivada

• Calcular velocidades instantáneas.
• Analizar el crecimiento y decrecimiento de funciones.
• Encontrar máximos y mínimos.
• Determinar la pendiente de una curva.

$$(x)'=1$$

$$(x^2)'=(x\cdot x)'=(x)'\cdot x+x\cdot(x)'=2x=2x^{2-1}$$

$$(x^3)'=(x\cdot x^2)'=(x)'\cdot x^2+x\cdot(x^2)'=1\cdot x^2+x\cdot 2x=3\cdot x^{3-1}$$

$$(x^4)'=(x\cdot x^3)'=(x)'\cdot x^3+x\cdot(x^3)'=1\cdot x^3+x\cdot 3x^2=4\cdot x^{4-1}$$

$$\dots$$

$$(x^n)=n\cdot x^{n-1}$$

Preguntas de los tres primeros temas

Tema 1: Límites con valor absoluto (Verdadero o Falso)

___ El valor absoluto siempre es positivo.

___ Para resolver límites con valor absoluto se pueden analizar los límites por la izquierda y por la derecha.

Tema 2: Límites con logaritmos (Selección múltiple)

¿Qué se estudia en este tema?

A) Derivadas

B) Logaritmos

C) Fracciones

D) Ecuaciones

¿Cuál de las siguientes expresiones es un logaritmo?

A) x^2

B) $\sqrt{x}$

C) $\ln(x)$

D) $x + 1$

Tema 3: Límites con raíces (Selección múltiple)

¿Qué método se utiliza para resolver muchos límites con raíces?

A) Factorización

B) Conjugado

C) Regla de tres

D) Suma de términos

¿Qué contienen los límites con raíces?

A) Logaritmos

B) Fracciones

C) Raíces cuadradas

D) Derivadas