

UECIB "MUYU KAWSAY "

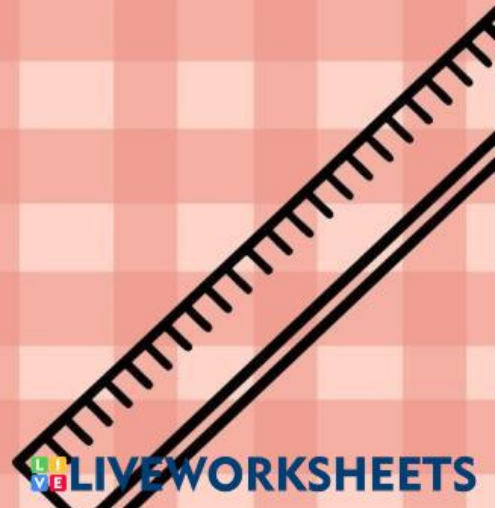
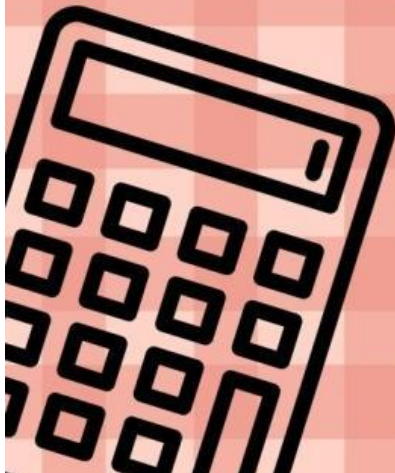
LÍMITES

MATEMÁTICAS - TERCER TRIMESTRE

NOMBRE: KIMBERLY SISA

CURSO : 2DO BGU "B"

LICENCIADO: TUPAC VALLEJO



Sensopercepción

$$\text{Lim} \begin{matrix} \text{Strawberry} \\ \rightarrow \\ \text{Flower} \end{matrix} = f \left(\left(\text{Strawberry} \right) \right)$$

Límite con valor absoluto

Los límites con valor absoluto evalúan a que valor se aproxima la función cuando x tiende a un punto manejando la magnitud sin importar el signo (distancia al 0). Su concepto clave es definir el valor absoluto como una función a trozos, escribiendo $|x-a|$ como $x-a$ (si $x \geq a$) o $-(x-a)$, si $(x < a)$.

Definición de valor absoluto: Representa la distancia a 0:

$$|x| = x \quad \text{si } x \geq 0; \quad \text{y } |x| = -x \quad \text{si } x < 0.$$

Indeterminación: A menudo, estos límites producen formas indeterminadas (Eje: $0/0$) requiriendo a analizar los límites laterales.

Límites laterales: Debido a que la definición cambia de signo, se debe calcular los límites por la izquierda ($x \rightarrow a^-$) y por la derecha ($x \rightarrow a^+$).

Existencia de límites: El límite general existe si y solo si los límites laterales :

Ejemplo

$$\text{Lim}_{x \rightarrow 3} \frac{|x-3|}{x-3}$$

$$\text{Lim}_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x-3} = \frac{0}{0}$$

$$|x-3|$$

$$x-3 \Rightarrow 0$$

$$\text{Lim}_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x-3} = \frac{3-3}{3-3} = 1$$

$$\text{Lim}_{x \rightarrow 3} = \frac{-x+3}{-x+3} = 0 \quad \text{No existe}$$



PREGUNTA:

Calcula el siguiente límite:

$$\text{Lim}_{x \rightarrow -2} \left(\frac{|x+2|}{x+2} \right)$$

¿Cuál es el valor del límite?

- A) -1 B) 1 C) 0 D) No existe



Sensopercepción

$$\lim_{x \rightarrow \text{grapes}} \frac{\sqrt{\text{grapes}} - 5}{\text{grapes} - 3}$$

Límites con raíces

Para resolver límites que involucren raíces especialmente cuando resultan en la indeterminación $0/0$, el método más efectivo es la racionalización

El conjugado

La idea es eliminar la raíz del denominador o numerador usando la diferencia de cuadrados

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

Si tienes raíz de menos a $\sqrt{x} - a$ el conjugado sería $\sqrt{x} + a$

$$\begin{aligned} &(\sqrt{x} - a)(\sqrt{x} + a) \\ &= ((\sqrt{x})^2 - a^2) \\ &= (x - a^2) \end{aligned}$$



Pasos para resolver:

1. Evaluar y sustituir para encontrar la indeterminación.
2. Multiplicar por el conjugado.
3. Simplificar aplicando la diferencia de cuadrados.
4. Cancelar términos.
5. Sustituir de nuevo y encontrar el valor final.

EJEMPLO

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} \\ = \frac{\sqrt{4} - 2}{4 - 4} \\ = \frac{2 - 2}{0} = \frac{0}{0} \end{aligned}$$

Indeterminación $0/0$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{((\sqrt{x})^2 - 2^2)}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x - 4)}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{\sqrt{x} + 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{\sqrt{x} + 2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4} + 2}$$

$$= \frac{1}{2 + 2}$$

$$= \frac{1}{4} = 4$$

PREGUNTA

¿Cuál es la razón principal para usar el conjugado al resolver límites que resultan en indeterminación $0/0$?

- A) Para simplificar la raíz.
- B) Para eliminar la raíz del denominador o numerador aplicando la diferencia de cuadrados.
- C) Para multiplicar ambos términos por cero.
- D) Para cambiar el signo de la raíz.



Sensopercepción

$$\text{Log}_b (x \cdot y) = \text{Log}_b (x) + \text{Log}_b (y)$$

Límites con logaritmos

Los límites con logaritmos son un clásico el secreto está en dominar sus propiedades y conocer los límites notables.

Propiedades de los logaritmos

Antes de calcular cualquier límite, a menudo tendrás que acomodar la expresión usando estas propiedades:

- * Logaritmo de un producto $\log_b (x \cdot y) = \log_b x + \log_b y$
- * Logaritmo de un cociente $\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$
- * Logaritmo de una potencia $\log_b x^n = n \log_b x$

Gráfico y límites de logaritmo

Es fundamental saber como se comporta la función logaritmo natural ($\ln(x)$) en sus extremos el logaritmo solo existe para números mayores que 0.

- * Cuando x tiende a ∞ crece lentamente pero va al infinito
- * Cuando x tiende a 0 por la derecha
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$
Se pega al eje y y hacia abajo.

EJEMPLO

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

PREGUNTA

¿Cuál de las siguientes es una propiedad correcta de los logaritmos?

- A) $\log_b (x + y) = \log_b x + \log_b y$ B) $\log_b \left(\frac{x}{y}\right) = \log_b x - \log_b y$
C) $\log_b (x^n) = n + \log_b x$ D) $\log_b (x \cdot y) = \log_b x - \log_b y$



Límites notable con logaritmos



Cuando te encuentras con indeterminaciones

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{0} \text{ el}$$

siguiente paso será de aplicar cualquiera de

sus propiedades $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

Pasos para resolver

- 1 Calcular la indeterminación.
- 2 Aplicamos cualquiera de sus propiedades en una función continua.
- 3 Identificamos el valor del límite y resolvemos.



EJEMPLO

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x+4}-2} = \frac{0}{2-2} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x+4}-2} \cdot \frac{\sqrt{x+4}+2}{\sqrt{x+4}+2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) \cdot \sqrt{x+4}+2}{(\sqrt{x+4})^2-4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) \cdot \sqrt{x+4}+2}{x+4-4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(0) \cdot \sqrt{x+4}+2}{\rightarrow 0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x+4}+2$$

$$\sqrt{0+4}+2$$

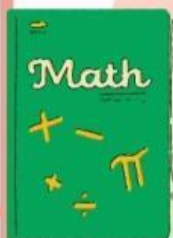
$$\sqrt{4}+2$$

$$2+2=4 //$$

Pregunta

¿Cómo se denomina al procedimiento que permite simplificar una expresión compleja para hallar el valor de un límite notable con logaritmos?

- A) Determinación algebraica.
- B) Aplicación de propiedades.
- C) Sustitución de variables.

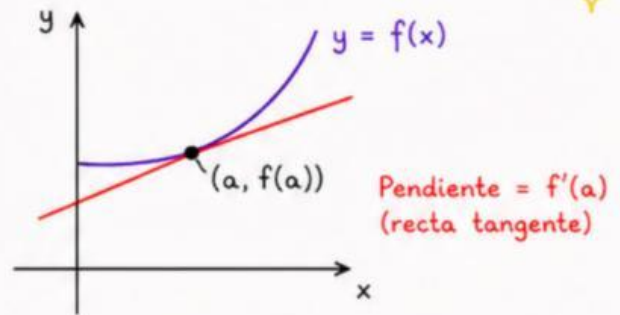


Inducción a la derivada

¿Qué es la derivada?

La derivada mide la razón de cambio instantánea de una función en un punto. Geométricamente, es la pendiente de la recta tangente a la curva en ese punto.

Si una función $f(x)$ es derivable en $x = a$, entonces su derivada en a , denotada $f'(a)$, indica cuánto cambia f cuando x cambia una cantidad muy pequeña alrededor de a .



Definición de la derivada

La derivada de f en un punto a se define como el límite del cociente de incrementos cuando h tiende a 0 (con $h \neq 0$):

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Si este límite existe, decimos que f es derivable en a .

La derivada de $f(x)$ se denota $f'(x)$ o $\frac{df}{dx}$.

Interpretación y significado

- * $f'(x)$ indica la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x, f(x))$.
- * $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ está aumentando en x .
- * $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ está disminuyendo en x .
- * $f'(x) = 0 \Rightarrow$ La pendiente es horizontal (posible máximo, mínimo o punto de inflexión).
- * f' no existe \Rightarrow Puede haber una esquina, cúspide, discontinuidad vertical o tangente vertical.

Reglas básicas de derivación

- * $\frac{d}{dx} [c] = 0$ (c constante)
- * $\frac{d}{dx} [x] = 1$
- * $\frac{d}{dx} [k f(x)] = k f'(x)$ (k constante)
- * $\frac{d}{dx} [f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x)$
- * $\frac{d}{dx} [f(x) - g(x)] = f'(x) - g'(x)$
- * $\frac{d}{dx} [f(x) g(x)] = f'(x) g(x) + f(x) g'(x)$ (regla del producto)
- * $\frac{d}{dx} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{f'(x) g(x) - f(x) g'(x)}{[g(x)]^2}$ ($g(x) \neq 0$) (regla del cociente)
- * $\frac{d}{dx} [f \circ g](x) = f'(g(x)) g'(x)$ (regla de la cadena)

Reglas para funciones elementales

- * $\frac{d}{dx} [x^n] = n x^{n-1}$ ($n \in \mathbb{R}$)
- * $\frac{d}{dx} [e^x] = e^x$
- * $\frac{d}{dx} [\ln x] = \frac{1}{x}$ ($x > 0$)
- * $\frac{d}{dx} [\log_a x] = \frac{1}{x \ln a}$ ($a > 0, a \neq 1, x > 0$)
- * $\frac{d}{dx} [\sin x] = \cos x$
- * $\frac{d}{dx} [\cos x] = -\sin x$
- * $\frac{d}{dx} [\tan x] = \sec^2 x$
- * $\frac{d}{dx} [\cot x] = -\csc^2 x$
- * $\frac{d}{dx} [\sec x] = \sec x \tan x$
- * $\frac{d}{dx} [\csc x] = -\csc x \cot x$

Ejemplos

- * $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 5$
 $f'(x) = 12x^3 - 4x$
- * $g(x) = e^x \sin x$
 $g'(x) = e^x \sin x + e^x \cos x = e^x(\sin x + \cos x)$
- * $h(x) = \ln(x^2 + 1)$
 $h'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$

- * $p(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$
 $p'(x) = \frac{(2x)(x-1) - (x^2+1)(1)}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}$
- * $q(x) = \tan(2x)$
 $q'(x) = 2 \sec^2(2x)$
- * $r(x) = x^3 e^x$
 $r'(x) = 3x^2 e^x + x^3 e^x = e^x(3x^2 + x^3)$

Conclusión

La derivada es una herramienta fundamental del cálculo que permite estudiar y comprender el comportamiento de las funciones. A través de reglas y técnicas de derivación, podemos analizar tasas de cambio, encontrar máximos y mínimos, determinar puntos de inflexión y resolver problemas de optimización en diversas aplicaciones científicas, económicas e ingenieriles.

