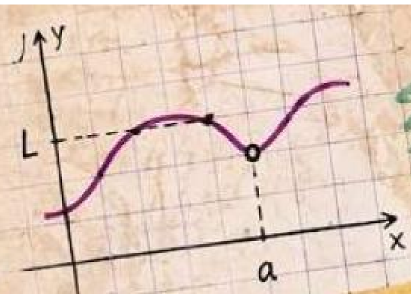
"Las matemáticas no son solo números, son lógica, creatividad y perseverancia."

$\lim_{x \to a} f(x) = L$

$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$

$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$

$\Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) = L$



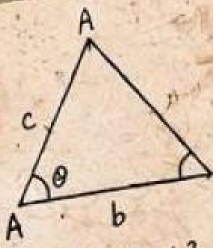
$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

UNIDAD EDUCATIVA COMUNITARIA INTERCULTURAL BILINGÜE MUYU KAWSAY

Educación Bilingüe e Intercultural, forjando la manera de amar, con personas crecientes y sabias.

2B

Mallury Morales



$c^2 = a^2 + b^2$

La práctica hace al maestro.

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

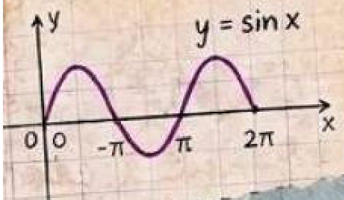
$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

ESTUDIANTE:
Mallury Morales

CURSO Y PARALELO:
Segundo de Bachillerato "B"

DOCENTE:
Lic. Tupac Vallejo

ÁREA:
Matemáticas



Racionalización

$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a} \quad (a > 0)$

$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$

$\log(ab) = \log a + \log b$

$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b$

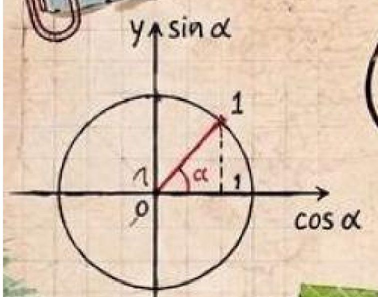
$\log(a^n) = n \log a$

$\log_a a = 1$

LÍMITE

$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$

$(\lim g(x) \neq 0)$



TEMAS:

- Límites con valor absoluto
- Límite y racionalización
- Límites con logaritmos
- Inducción a la derivada

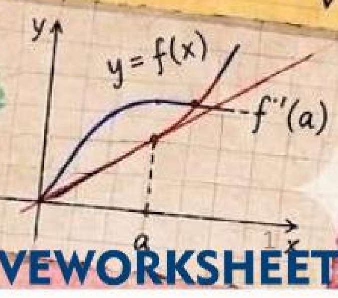
Inducción a la derivada

Si $f(x) = x^n$, entonces $f'(x) = nx^{n-1}$

Para $n=1$: $f'(x) = 1$

Suponga cierto para $n=k$, Demuestre para $n=k+1$.

$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$



SIN MATEMÁTICAS, NO HAY NADA QUE ENTENDER EN ESTE MUNDO.

Tema 1

1. Límites con Valor Absoluto

Los límites con valor absoluto evalúan a qué valor se aproxima una función cuando x tiende a un punto específico, manejando la distancia respecto al origen sin importar el signo algebraico resultante.

Definición de Valor Absoluto:

Representa la distancia geométrica de un número al origen 0. Formalmente, se define como una función a trozos:

$$|x| = \{x, \text{ si } x \geq 0; -x, \text{ si } x < 0\}$$

Indeterminación y Límites Laterales:

A menudo, estos límites producen formas indeterminadas del tipo $0/0$, lo cual requiere un análisis exhaustivo mediante límites laterales. Debido a que la definición cambia de signo según la aproximación, se deben calcular obligatoriamente:

- **Límite por la izquierda:** $\lim_{x\to a^-} f(x)$, donde se toma la rama negativa de la definición si el argumento se hace menor que cero.
- **Límite por la derecha:** $\lim_{x\to a^+} f(x)$, utilizando la rama positiva.

Existencia del límite: El límite general existe si y solo si ambos límites laterales son perfectamente finitos e iguales:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = L \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = L$$

EJEMPLO DESARROLLADO

Calcular el límite: $lim x \to 3\ |x - 3| / (x - 3)$

1. Evaluación directa: $|3 - 3| / (3 - 3) = 0/0$ (Indeterminación).

2. Análisis por izquierda ($x \to 3^-$): Como $x<3$, entonces $x-3< 0$, por lo que $|x - 3| = -(x - 3)$.

$$\lim_{x\to 3^-} [-(x - 3)] / (x - 3) = -1$$

3. Análisis por derecha ($x \to 3^+$): Como $x > 3$, entonces $x - 3 > 0$, por lo que $|x - 3| = x - 3$.

$$\lim_{x\to 3^+} (x - 3) / (x - 3) = 1$$

Conclusión: Como los límites laterales son distintos ($-1 \neq 1$), el límite general **no existe**.

Tema 2

2. Límite y Racionalización

Para resolver límites algebraicos que involucran raíces cuadradas o de mayor orden (especialmente cuando resultan en una indeterminación de la forma $0/0$), el método analítico más efectivo es la **racionalización**.

Concepto Clave: El Conjugado

La idea central consiste en eliminar la raíz del numerador o del denominador multiplicando toda la fracción por la expresión conjugada correspondiente, aprovechando el producto notable de la **diferencia de cuadrados**:

$$(a - b)(a + b) = a2 - b2$$

Si se tiene el término con raíz $\sqrt{x} - a$, su conjugado exacto será $\sqrt{x} + a$, de manera que al multiplicarlos se obtenga $(\sqrt{x})2 - a2 = x - a2$.

Pasos fundamentales para resolver por racionalización:

- **Evaluar y sustituir:** Introducir el valor de tendencia para identificar la presencia de la indeterminación *0/0*.
- **Multiplicar por el conjugado:** Multiplicar tanto el numerador como el denominador por el conjugado de la sección irracional.
- **Simplificar:** Desarrollar los productos aplicando la diferencia de cuadrados.
- **Cancelar términos comunes:** Eliminar el factor crítico que causa la división por cero.
- **Sustituir de nuevo:** Evaluar la nueva expresión limpia para hallar el valor real del límite.

EJEMPLO DESARROLLADO

Calcular el límite: $\lim_{x\to 4} (\sqrt{x}-2) / (x - 4)$

1. Evaluación directa: $(\sqrt{4}-2)/(4 - 4) = (2 - 2) / 0 = 0/0$.

2. Multiplicación por el conjugado $(\sqrt{x} + 2)$:

$$\lim_{x\to 4} [(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)] / [(x - 4)(\sqrt{x} + 2)]$$

3. Aplicando diferencia de cuadrados en el numerador:

$$\lim_{x\to 4} [(\sqrt{x})2 - 22] / [(x - 4)(\sqrt{x} + 2)] = \lim_{x\to 4} (x - 4) / [(x - 4)(\sqrt{x} + 2)]$$

4. Cancelando el factor crítico $(x - 4)$:

$$\lim_{x\to 4} 1 / (\sqrt{x} + 2)$$

5. Evaluación final: $1 / (\sqrt{4} + 2) = 1 / (2 + 2) = 1/4$.

Tema 3

3. Límites con Logaritmos

Los límites logarítmicos son esenciales en el análisis matemático. El secreto principal para su resolución radica en dominar con absoluta fluidez sus propiedades algebraicas y conocer las estructuras de los límites notables fundamentales.

Propiedades Esenciales de los Logaritmos:

Antes de ejecutar cualquier proceso de límite, es mandatorio acomodar y transformar la expresión original usando las siguientes identidades:

- **Logaritmo de un producto:** $\log_b(x \cdot y) = \log_b(x) + \log_b(y)$
- **Logaritmo de un cociente:** $\log_b(x / y) = \log_b(x) - \log_b(y)$
- **Logaritmo de una potencia:** $\log_b(x^n) = n \cdot \log_b(x)$

Comportamiento Asintótico del Logaritmo Natural ($\ln(x)$):

- Cuando $x \to +\infty$: $\lim_{x\to\infty} \ln(x) = +\infty$ (Crece de forma continua y monótona).
- Cuando $x \to 0^+$ (por la derecha): $\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$ (La curva se asienta verticalmente pegándose al eje "y").

Límite Notable Logarítmico:

Frente a indeterminaciones de la forma $0/0$, se recurre a la siguiente equivalencia fundamental:

$$\lim_{x\to 0} [\ln(1 + x)] / x = 1$$

EJEMPLO DESARROLLADO

Calcular el límite: $\lim_{x\to 0} [\ln(1 + 5x)] / x$

1. Al evaluar directamente obtenemos $\ln(1)/0 = 0/0$.
2. Multiplicamos y dividimos por 5 para ajustar al límite notable:

$$\lim_{x\to 0} 5 \cdot [\ln(1 + 5x)] / (5x)$$

3. Haciendo el cambio de variable $u = 5x$ (donde si $x\to 0$, entonces $u\to 0$):

$$5 \cdot \lim_{u\to 0} [\ln(1 + u)] / u = 5 \cdot (1) = 5$$

Tema Avanzado

4. Investigación Analítica: Inducción a la Derivada

4.1 Origen Conceptual y Geométrico

La derivada nació como la respuesta a dos problemas científicos fundamentales del siglo XVII: la determinación de la recta tangente a una curva en un punto dado (problema geométrico planteado por Pierre de Fermat) y la descripción de la velocidad instantánea de un cuerpo en movimiento (problema físico analizado por Isaac Newton y Gottfried Leibniz).

Geométricamente, si tomamos una función continua $y = f(x)$, la pendiente de la recta secante que pasa por dos puntos cercanos $P(x, f(x))$ y $Q(x + h, f(x + h))$ viene dada por el cociente incremental de Newton:

$$m_{sec} = [f(x + h) - f(x)] / h$$

Si reducimos de forma progresiva la distancia entre los puntos haciendo que h tienda a cero, la recta secante pivota y se transforma en la recta tangente a la curva en el punto P. Por consiguiente, la pendiente de dicha recta tangente es el límite del cociente incremental.

4.2 Definición Formal mediante Límites

La derivada de una función $f(x)$ en un punto x, denotada como $f'(x)$ o df/dx, se define rigurosamente como:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} [f(x + h) - f(x)] / h$$

Siempre que dicho límite exista. Si el límite es finito, se afirma que la función es derivable en ese punto específico.

4.3 Demostración por Inducción Matemática de la Regla de las Potencias

Deseamos demostrar que para cualquier función de la forma $f(x) = xn$ (donde n ∈&mathbb;N), su derivada es $f'(x) = n \cdot xn\text{-}1$.

1. Base Inductiva (para $n = 1$):

Sea $f(x) = x1 = x$. Aplicando la definición formal por límites:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} [(x + h) - x] / h = \lim_{h\to 0} (h / h) = 1$$

Usando la fórmula general: $1 \cdot x^{1-1 = 1 \cdot x0 = 1}$. Se cumple perfectamente la base inductiva.

2. Hipótesis Inductiva:

Suponemos que la propiedad es completamente cierta para un número entero cualquiera $n = k$, es decir:

$$\text{Si } f(x) = xk \Rightarrow f'(x) = k \cdot x^{k-1}$$

3. Tesis Inductiva:

Debemos demostrar que la propiedad se cumple para $n = k + 1$, esto es, que si $g(x) = x^{k+1}$, entonces su derivada es $g'(x) = (k + 1)xk$.

Podemos descomponer la función utilizando propiedades de las potencias: $g(x) = x^{k+1 = xk} \cdot x$. Para derivar esta expresión, aplicamos la **Regla del Producto** ($[u \cdot v]' = u'v + uv'$):

$$g'(x) = [xk]' \cdot x + xk \cdot [x]'$$

Sustituyendo la hipótesis inductiva ($^{[xk]' = k \cdot x\, k-1}$) y el caso base verificado ($[x]' = 1$):

$$g'(x) = (k \cdot x^{k-1}) \cdot x + xk \cdot (1)$$

$$g'(x) = k \cdot xk + xk$$

Factorizando por término común x^k:

$$g'(x) = (k + 1) \cdot xk$$

Queda formalmente demostrado por inducción matemática que la regla rige para todo número entero positivo.

EJEMPLO 1: APLICACIÓN DIRECTA DE LA REGLA POR DEFINICIÓN DE LÍMITE

Encontrar la derivada de *f(x) = 3x2 + 5* utilizando la definición formal de límite.

1. Planteamiento:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} [[3(x + h)2 + 5] - (3x2 + 5)] / h$$

2. Desarrollando el binomio al cuadrado:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} [3(x2 + 2xh + h2) + 5 - 3x2 - 5] / h$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} [3x2 + 6xh + 3h2 - 3x2] / h$$

3. Simplificando términos opuestos en el numerador:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} [6xh + 3h2] / h$$

4. Factorizando *h* para eliminar la indeterminación:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} [h(6x + 3h)] / h = \lim_{h\to 0} (6x + 3h)$$

5. Aplicando el límite cuando $h \to 0$:

$$f'(x) = 6x + 3(0) = 6x$$

EJEMPLO 2: DERIVACIÓN POR REGLA OPERACIONAL RÁPIDA

Calcular la función derivada de un polinomio de grado superior aplicando la regla de las potencias: *f(x) = 4x3 -2x ^{2} +7x - 1*

Aplicamos la linealidad de la derivada y la regla multiplicativa para cada monomio de forma independiente:

$$f'(x) = 4 \cdot (3x^{3-1}) - 2 \cdot (2x^{2-1}) + 7 \cdot (1x^{1-1}) - 0$$

f'(x) = 12x2 - 4x1 + 7x0

f'(x) = 12x2 4x + 7