

# LÍMITES

Compendio de Matemáticas e Introducción al Cálculo

---

|                  |                         |
|------------------|-------------------------|
| <b>NOMBRE:</b>   | Angulo Vite Maykel Jair |
| <b>CURSO:</b>    | 2do BGU B               |
| <b>PROFESOR:</b> | Tupac Vallejo           |
| <b>MATERIA:</b>  | Matemáticas             |

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \cdot f'(x) = dy/dx$$

QUITO, ECUADOR • 2026

# 1. LÍMITES CON VALOR ABSOLUTO

El cálculo de límites con expresiones en valor absoluto evalúa el comportamiento de una función cuando la variable  $x$  se aproxima a un punto crítico  $a$ . Debido a que el valor absoluto representa una distancia geométrica, elimina el efecto algebraico del signo y obliga a desglosar el término en una función definida a trozos:

$$\begin{aligned} |x - a| &= x - a & \text{si } x \geq a \\ |x - a| &= -(x - a) & \text{si } x < a \end{aligned}$$

Para garantizar la existencia del límite general, es estrictamente obligatorio calcular los límites laterales. El límite general existe y es único si y solo si el límite por la izquierda ( $x \rightarrow a^-$ ) es igual al límite por la derecha ( $x \rightarrow a^+$ ).

## EJERCICIO RESUELTO: DETERMINACIÓN ANALÍTICA DE EXISTENCIA

Calcular:  $\lim_{x \rightarrow 3} |x - 3| / (x - 3)$

1. **Evaluación directa:** Produce la indeterminación  $0/0$ .

2. **Límite por la derecha ( $x \rightarrow 3^+$ ):** Como  $x > 3$ , el valor absoluto se mantiene positivo:  $|x - 3| = x - 3$ .

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} (x - 3) / (x - 3) = \lim_{x \rightarrow 3^+} 1 = 1$$

3. **Límite por la izquierda ( $x \rightarrow 3^-$ ):** Como  $x < 3$  se aplica el signo opuesto:  $|x - 3| = -(x - 3)$ .

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} -(x - 3) / (x - 3) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (-1) = -1$$

**Conclusión:** Al diferir los límites laterales ( $1 \neq -1$ ), el límite general no existe.

# 2. LÍMITES ALGEBRAICOS CON RAÍCES (INDETERMINACIÓN 0/0)

Cuando la sustitución directa en expresiones con radicales racionales genera la indeterminación  $0/0$ , se implementa la técnica de la racionalización para remover analíticamente los términos que anulan la función. Esta técnica consiste en multiplicar el numerador y el denominador por el término conjugado de la expresión radical (cambiando el signo que separa a los términos). Al realizar este paso, se aprovecha el producto notable de la diferencia de cuadrados:

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

### EJERCICIO RESUELTO: RACIONALIZACIÓN DE RAÍZ EN EL NUMERADOR

Calcular:  $\lim_{x \rightarrow 4} (\sqrt{x} - 2) / (x - 4)$

Multiplicando por el conjugado  $(\sqrt{x} + 2)$ :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} [(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)] / [(x - 4)(\sqrt{x} + 2)] \\ = \lim_{x \rightarrow 4} [(\sqrt{x})^2 - 2^2] / [(x - 4)(\sqrt{x} + 2)] \\ = \lim_{x \rightarrow 4} (x - 4) / [(x - 4)(\sqrt{x} + 2)] \end{aligned}$$

Cancelando el factor común crítico  $(x - 4)$ :

$$= \lim_{x \rightarrow 4} 1 / (\sqrt{x} + 2) = 1 / (\sqrt{4} + 2) = 1/4$$

**Resultado:** 1/4

## 3. LÍMITES AL INFINITO CON RADICALES (FORMA

$\infty - \infty$ )

Frente a expresiones que tienden a infinito positivo y generan restas indeterminables del tipo  $\infty - \infty$ , se coloca un denominador unitario ficticio y se aplica la racionalización mediante el conjugado. Luego, para simplificar el comportamiento asintótico, se dividen todos los términos por la variable con la potencia de mayor grado.

### EJERCICIO RESUELTO: EVALUACIÓN ASINTÓTICA AL INFINITO

Calcular:  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 5x} - x)$

Aplicando el conjugado radical sobre 1:

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} [(x^2 + 5x) - x^2] / [\sqrt{x^2 + 5x} + x] = \lim_{x \rightarrow \infty} 5x / [\sqrt{x^2 + 5x} + x]$$

Dividiendo todo entre la máxima potencia lineal (x):

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} 5 / [\sqrt{1 + 5/x} + 1]$$

Evaluando la tendencia límite sabiendo que  $5/\infty \rightarrow 0$ :

$$= 5 / (\sqrt{1 + 0} + 1) = 5/2$$

**Resultado: 5/2**

## 4. LÍMITES LOGARÍTMICOS

La resolución analítica de estructuras logarítmicas requiere el uso de las propiedades fundamentales de los logaritmos para reescribir y simplificar los argumentos:

- **Producto:**  $\log_b(x \cdot y) = \log_b(x) + \log_b(y)$
- **Cociente:**  $\log_b(x / y) = \log_b(x) - \log_b(y)$
- **Potencia:**  $\log_b(x^n) = n \cdot \log_b(x)$

Se destaca el uso del Límite Notable Fundamental para remover indeterminaciones:

$$\lim_{x \rightarrow 0} [\ln(1 + x) / x] = 1$$

### EJERCICIO RESUELTO: APLICACIÓN DEL LÍMITE NOTABLE

Calcular:  $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x) / (\sqrt{x+4} - 2)$

Multiplicando simultáneamente por el conjugado radical del denominador  $(\sqrt{x+4} + 2)$ :

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 0} [ \ln(1+x) \cdot (\sqrt{x+4} + 2) ] / [ (x+4) - 4 ] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} [ \ln(1+x) / x ] \cdot (\sqrt{x+4} + 2) \end{aligned}$$

Sustituyendo el valor del límite notable por 1:

$$= 1 \cdot (\sqrt{0+4} + 2) = 1 \cdot (2 + 2) = 4$$

**Resultado: 4**

## 5. INVESTIGACIÓN: INDUCCIÓN A LA DERIVADA

### Concepto Teórico Fundamental

La derivada no representa un concepto aislado, sino que constituye una aplicación directa y especializada del concepto de límite. Nace históricamente como la solución matemática formal a dos problemas fundamentales de la geometría y la física: determinar la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto específico y calcular la razón de cambio instantánea (como la velocidad instantánea de un objeto).

Geoméricamente, si elegimos dos puntos sobre una curva descrita por  $f(x)$ , el punto fijo  $P = (x, f(x))$  y un punto cercano  $Q = (x+h, f(x+h))$ , la pendiente de la recta secante que une a ambos puntos viene dada por el denominado **Cociente de Diferencias**:

$$m_{\text{secante}} = [ f(x+h) - f(x) ] / h$$

Cuando hacemos que el incremento horizontal  $h$  disminuya continuamente hasta aproximarse a cero ( $h \rightarrow 0$ ), el punto  $Q$  se desplaza sobre la curva hasta superponerse con  $P$ . En ese instante exacto, la recta secante se transforma en la recta tangente a la curva. Formalmente, este límite define a la derivada de una función, representada por  $f'(x)$ :

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} [ f(x+h) - f(x) ] / h$$

**Vínculo Analítico:** Al evaluar directamente  $h = 0$  en el cociente de diferencias, siempre obtendremos de forma natural una indeterminación del tipo  $0/0$ . Por este motivo, para calcular la derivada por su

definición formal es indispensable recurrir a las herramientas de simplificación algebraica, factorización y racionalización explicadas en las secciones anteriores.

## Ejercicios Demostrativos de Aplicación

### EJERCICIO DEMOSTRATIVO 1

**Problema:** Determinar la función derivada de  $f(x) = x^2$  utilizando la definición formal por límites.

1. Sustituir la función en la estructura del límite de la derivada:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} [(x+h)^2 - x^2] / h$$

2. Desarrollar algebraicamente el binomio al cuadrado en el numerador:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} [(x^2 + 2xh + h^2) - x^2] / h$$

3. Simplificar cancelando los términos opuestos  $x^2 - x^2$ :

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} [2xh + h^2] / h$$

4. Extraer factor común de la variable h en el numerador para disolver la indeterminación 0/0:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} [h(2x + h)] / h = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h)$$

5. Evaluar la tendencia final haciendo la sustitución directa de  $h = 0$ :

$$f'(x) = 2x + 0 = 2x$$

**Resultado:**  $f'(x) = 2x$

## EJERCICIO DEMOSTRATIVO 2

**Problema:** Determinar la función derivada de  $f(x) = 5x - 3$  utilizando la definición formal por límites.

1. Plantear la estructura del límite:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} [ (5(x+h) - 3) - (5x - 3) ] / h$$

2. Desarrollar y romper paréntesis:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} [ 5x + 5h - 3 - 5x + 3 ] / h$$

3. Simplificar términos opuestos ( $5x - 5x$  y  $-3 + 3$ ):

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} [ 5h ] / h$$

4. Cancelar  $h$  y evaluar el límite:

$$f'(x) = 5$$

**Resultado:**  $f'(x) = 5$