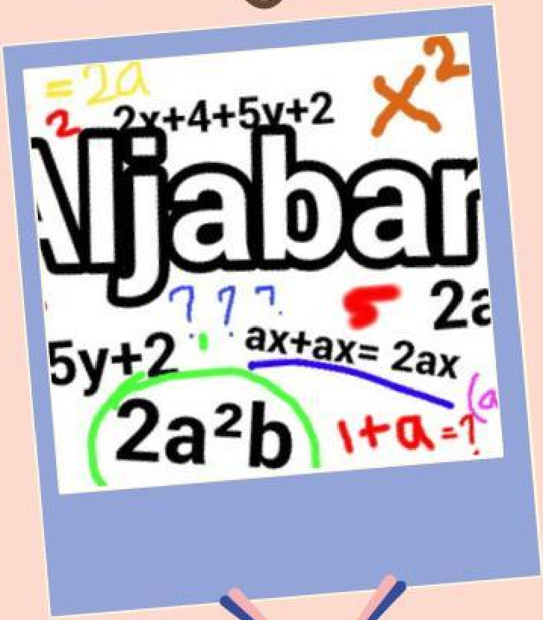

LEMBAR KERJA MAHASISWA

JENIS IDEAL

SUB CPMK0622

Mampu membuktikan suatu ideal dari ring dengan menggunakan pemikiran logis, kritis dan sistematis

INDIKATOR

Mahasiswa mampu menggunakan pemikiran logis dan sistematis dalam:

1. Menjelaskan definisi ideal utama, prima dan maksimal
2. Membuat contoh ideal utama, prima dan maksimal
3. Membuktikan ideal utama, prima dan maksimal

PETUNJUK PENGERJAAN

1. Bacalah materi dan simaklah video pembelajaran sebelum menyelesaikan tugas
2. Selesaikan tugas dengan baik sesuai dengan langkah kegiatan yang diberikan
3. Gunakan sumber pembelajaran lain yang dapat membantu kalian memahami konsep yang dipelajari
4. Waktu pengerjaan 80 menit

NAMA /NIM :

....

....

....

....

....

MATERI

Materi pada pertemuan kali ini masih merupakan kelanjutan dari pertemuan sebelumnya yaitu mengenai jenis ideal. Jenis ideal yang akan dibahas adalah ideal utama, ideal prima dan ideal maksimal.

PERHATIKAN VIDEO PEMBELAJARAN BERIKUT!

YouTube

PELAJARILAH MATERI PEMBELAJARAN BERIKUT!

PDF

Setelah mempelajari materi di atas, selesaikan permasalahan-permasalahan berikut!

Pasangkan definisi yang sesuai untuk setiap jenis ideal pada kolom sebelah kanan

Suatu ideal sejati A dari R, ketika B ideal dari R dan $A \subseteq B \subseteq R$, maka $B = A$ atau $B = R$	IDEAL UTAMA
Jika a adalah suatu elemen dari R ring komutatif dengan unsur kesatuan, maka $Ra = \{ra \mid r \in R\}$ adalah ideal dari R	IDEAL PRIMA
Suatu ideal sejati A dari ring komutatif R, jika $a,b \in R$ dan $ab \in A$ maka $a \in A$ atau $b \in A$	IDEAL MAKSIMAL

YA ATAU TIDAK?

Perhatikan pernyataan berikut!
Beri tanda centang untuk pernyataan yang bernilai benar!

- 6Z ideal prima dari Z
- 5Z ideal prima dari Z
- {0} ideal utama R
- 6Z ideal maksimal dari 2Z
- {0, 3, 6, 9, 12,15} ideal utama dari Z_{18}
- {0, 4, 8, 12} ideal maksimal dari Z_{16}
- 2Z ideal maksimal dari 2Z
- {0} ideal maksimal dari C

Catatan

$$nZ = \{nx | x \in Z\}$$

$$Z_n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$$

$$M_2(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in R \right\}$$

$$C = \{a + bi | a, b \in R\}$$

1. Tuliskan semua ideal utama dari Z_{21}
2. Buatlah contoh ideal prima dari Z

GENERALISASI

nZ ideal prima dari Z jika

....

Pembuktian Ideal Prima

Dalam $Z \times Z$, misalkan $I = \{(a,0) \mid a \in Z\}$.
Buktikan bahwa I adalah ideal prima

Diketahui: $I = \{(a,0) \mid a \in Z\}$

$Z \times Z = \{(a,b) \mid a, b \in Z\}$

Akan dibuktikan: I ideal prima

Bukti:

a). Ambil sebarang $x \in I$.

Misalkan x = (……, ……) dengan ……, ……$\in$ ……

Karena semua komponen x memenuhi syarat keanggotaan $Z \times Z$ maka $x \in$ ……

Terbukti bahwa $I \subseteq$ ……

b). Ambil elemen identitas …… $\in Z \times Z$.

Karena komponen kedua dari …… sama dengan …… dan …… $\in Z$, maka …… $\in I$.

Jadi $I \neq \varnothing$.

c). Ambil sebarang $x, y \in I$ dan $r \in Z \times Z$

Misalkan x = ……, y = ……

dengan ……, …… $\in Z$ dan r = …… $\in Z \times Z$

i). x – y = ……… – ……… = …………

Karena ……, ……$\in$…… maka ………$\in$ ………

Jadi …… $\in I$

Terbukti bahwa $\forall\, x, y \in I \Rightarrow x - y \in I$

Pembuktian Ideal Prima

ii). $r\,x = \ldots\ldots\ldots \times \ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$x\,r = \ldots\ldots\ldots \times \ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Karena $\ldots\ldots,\ \ldots\ldots \in \ldots\ldots$ maka $\ldots\ldots\ldots \in \ldots\ldots\ldots$

Jadi $\ldots\ldots\ldots,\ \ldots\ldots\ldots \in I$

Jadi $\forall\, x \in I,\ r \in Z \times Z \Rightarrow x\,r,\ rx \in I$

Dari a), b) dan c) I ideal dari $Z \times Z$

d). Ambil (a, b) , $\ldots\ldots\ldots \in Z \times Z$ sehingga

$\ldots\ldots\ldots \times \ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots$

Untuk $(\ldots\ldots,\ \ldots\ldots) \in I$ syaratnya $bd = 0$

berarti $\ldots\ldots = 0$ atau $\ldots\ldots = 0,\ \forall\, b,d \in Z$

(karena Z ring tanpa pembagi nol).

Dengan demikian apabila

$(a,b) \times (c,d) \in I$ maka $(a,b) \in I$ atau $(c,d) \in I$

Jadi I ideal prima.

Pembuktian Ideal Maksimal

Buktikan bahwa 4Z ideal maksimal dari 2Z!

Misal $4Z = \{4p \mid p \in Z\}$ dan $2Z = \{2p \mid p \in Z\}$

Pembuktian 4Z ideal dari 2Z bisa menggunakan cara analog dengan langkah penyelesaian pada Liveworksheet Ideal di pertemuan sebelumnya.

Untuk membuktikan ideal maksimal dapat mengikuti langkah berikut:

Perhatikan definisi dari ideal maksimal

Misal A ideal dari 2Z dan $4Z \subset A$, $4Z \neq A$

Akan ditunjukkan: A = ……

Untuk itu perlu ditunjukkan $A \subseteq$ ……. dan ……$\subseteq A$

Karena A ideal dari 2Z maka terbukti bahwa $A \subseteq$ …...

Berarti tinggal membuktikan ……$\subseteq A$

Berarti terdapat $x \in A$ tetapi $x \notin$ ……, sehingga

$$x = 4k + 2 \quad , k \in Z$$

$$\Rightarrow \quad 2 = x - \ldots\ldots \in \ldots\ldots$$

$$\Rightarrow \quad 2 \in \ldots\ldots\ldots$$

Di lain pihak, ambil sebarang $y = 2n \in 2Z$

Untuk kasus $n > 0$, $2n = \ldots + \ldots + \ldots + \ldots + \ldots \in \ldots$

Untuk kasus $n = 0$, $2n = 0 \in A$

Untuk kasus $n < 0$, $2n = \ldots + \ldots + \ldots + \ldots \in \ldots$

Dengan demikian $\forall\, y = 2n \in 2Z \Rightarrow y \in$ ……

Jadi terbukti bahwa $2Z \subseteq A$ sehingga $A = 2Z$.

Terbukti bahwa 4Z ideal maksimal dari 2Z.

Generalisasi

Berdasarkan pembuktian di atas, tuliskan simpulan apa yang kalian dapatkan terkait ideal maksimal dari 2Z!

ALASAN

Jelaskan alasan dari simpulan kalian di atas!
