EXPONENTIAL FORM, PRODUCTS AND POWERS IN EXPONENTIAL FORM, ARGUMENTS OF PRODUCTS AND QUOTIENTS, ROOTS OF COMPLEX NUMBERS, AND REGION IN THE COMPLEX PLANE

BENTUK EKSPONEN, PERKALIAN DALAM BENTUK EKSPONEN, HASIL KALI DAN BAGI, BENTUK PANGKAT DALAM BILANGAN KOMPLEKS, DAERAH PADA BILANGAN KOMPLEKS

Makalah Ini Disusun Guna Memenuhi Tugas Mata Kuliah Analisa Variabel Kompleks

Dosen Pengampu:

Dr. Frenza Fairuz Firmansyah S.Pd. M.Pd.

Saddam Hussen S.Pd. M.Pd.

Disusun Oleh Kelompok 2:

Mochammad Indra Akbar	240210101013
Natasya Aprilia	240210101144
Kayla Nuril Firdausin Nuzula	240210101149

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA

FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN

UNIVERSITAS JEMBER

2026

1. Bentuk Eksponen

Let r and θ be polar coordinates of the point (x, y)that corresponds to a nonzero complex number $z = x + iy$. Since $x = r \cos\cos\theta$ and $y = r \sin\sin\theta$, the number z can be written in polar form as

Misalkan r dan θ koordinat kutub pada titik (x, y) yang sesuai dengan bilangan kompleks bukkan nol $z = x + iy$. Karena $x = r\cos\cos\theta$ dan $y = r\sin\sin\theta$, bilangan z dapat dituliskan dalam bentuk kutub sebagai

$$z = r(\cos\cos\theta + \sin\sin\theta).$$

If $z = 0$, the coordinate θ is undefined; and so it is understood that $z \neq 0$ whenever polar coordinates are used.

Jika $z = 0$, koordinat θ tidak terdefinisi; dan dapat dipahami bahwa $z \neq 0$ setiap kali koordinat kutub digunakan.

In complex analysis, the real number r is not allowed to be negative and is the length of the radius vector for z ; that is, $r = |z|$. The real number θ represents the angle, measured in radians, that z makes with the positive real axis when z is interpreted as a radius vector (Fig. 6).

Dalam Analisa kompleks, bilangan real r, tidak boleh negative dan merupakan Panjang vector jari-jari untuk z; yaitu, $r = |z|$. Bilangan real θ mewakili sudut, diukur dalam radian, yang dibuat z dengan sumbu real positif Ketika z diinterpretasikan sebagai vekktor radius (gambar 6)

As in calculus, θ has an infinite number of possible values, including negative ones, that differ by integral multiples of 2π. Those values can be determined from the equation $\tan\theta = \frac{y}{x}$, where the quadrant containing the point corresponding to z must be specified. Each value of θ is called an argument of z, and the set of all such values is denoted by arg z. The principal value of arg z , denoted by z , is that unique value Θ such that $-\pi < \theta \leq \pi$. Evidently, then,

Seperti dalam kalkulus, θ memiliki jumlah nilai yang mungkin tak terhingga, termasuk yang negatif, yang berbeda dengan kelipatan integral 2π. Nilai tersebut dapat ditentukan dari persamaan $\tan\tan\theta = \frac{y}{x}$, Dimana kuadran yang memuat titik yang bersesuaian dengan z harus ditentukan. Setiap nilai θ disebut argument z, dan himpunan semua nilai tersebut dilambangkan dengan z, adalah nilai unik θ sedemikkian rupa sehingga $-\pi < \theta \leq \pi$. Terbukti, kemudian,

$$\arg \arg z = z + 2n\pi$$

$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$

Also, when z is a negative real number, z has value π , not $-\pi$
Juga, ketika z adalah bilangan real negatif, z memiliki nilai π, bukan $-\pi$

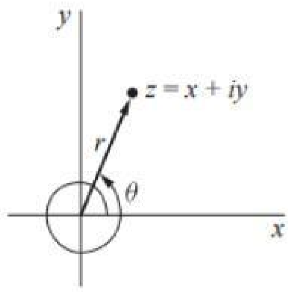

FIGURE 6

The symbol $e^{i\theta}$, or $(i\theta)$, is defined by means of Euler's formula as

Simbol $e^{i\theta}$, atau $(i\theta)$ didefinisikan dengan Rumus *Euler* sebagai:

$$e^{i\theta} = \cos \cos \theta + i \sin \sin \theta$$

Where θ is to be measured in radians. It enables one to write the polar form more compactly in exponential form as

Dimana θ diukur dalam radian. Hal ini memungkkinkan seseorang untuk menulis bentuk polar lebih kompak dalam bentuk eksponensial sebagai

$$z = r(\cos \cos \theta + i \sin \sin \theta) = re^{i\theta}$$

Example:

Nyatakan bilangan kompleks $z = 1 + i$ dalam bentuk polar dan bentuk eksponen!

Solusi:

Diketahui:

$$x = 1, \quad y = 1$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$r = \sqrt{1^2 + 1^2}$$

$$r = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$$

Cari θ:

$$tan\theta = \frac{y}{x}$$

$$tan\theta = \frac{1}{1} = 1$$

$$\theta = 45^0 = \frac{\pi}{4}$$

(Karenna di kuadran pertama)

Bentuk polar:

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\ sin\frac{\pi}{4}\right)$$

Bentuk eksponen:

$$z = re^{i\theta}$$

$$z = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$$

2. Hasil Kali dan Pangkat dalam Bentuk Eksponen

A. Sifat Perkalian Eksponensial

Diketahui rumus Euler:

$$e^{i\theta} = cos\theta + i\ sin\theta$$

Untuk dua sudut θ_1 dan θ_2 berlaku:

$$e^{i\theta_1}e^{i\theta_2} = (cos\theta_1 + i\ sin\theta_1)(cos\theta_2 + i\ sin\theta_2)$$

$$= (cos\theta_1 cos\theta_2 - sin\theta_1 sin\ \theta_2) + i(sin\theta_1 cos\theta_2 + cos\theta_1 sin\theta_2)$$

$$= cos(\theta^1 + \theta_2) + i\ sin(\theta^1 + \theta_2) = e^{i\ (\theta^1+\theta_2)}$$

B. Perkalian, Pembagian, dan Invers Bilangan Kompleks

Misalkan:

$$z_1 = r_1\ e^{i\theta_1},\ z_2 = r_2\ e^{i\theta_2}$$

a. Perkalian

$$z_1 z_2 = r_1\ e^{i\theta_1} r_2\ e^{i\theta_2} = r_1\ r_2 e^{i\theta_1}\ e^{i\theta_2} = r_1\ r_2 e^{i\ (\theta^1+\theta_2)}\ ...(1)$$

b. Pembagian

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1\ e^{i\theta_1}}{r_2\ e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2}.\frac{e^{i\theta_1}e^{-i\theta_2}}{e^{i\theta_2}e^{-i\theta_2}} = \frac{e^{i\ (\theta^1-\theta_2)}}{e^{i0}} = \frac{r_1}{r_2}e^{i\ (\theta^1-\theta_2)}\ ...(2)$$

c. Invers

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1e^{i0}}{r\ e^{i\theta}} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}\ ...(3)$$

C. Perpangkatan Bilangan Kompleks

Misalkan:

$$z = re^{i\theta}$$

Adib:

$$z^n = r^n e^{in\theta}, (\forall n \in \mathrm{Z}) \dots (4)$$

Akan dibuktikan dengan induksi

- Untuk $n = 1$

$$z^n = r^n e^{in\theta}$$
$$z^1 = r^1 e^{in\theta}$$
$$z = re^{i\theta}$$

- Asumsikan benar untuk $n = m$

$$z^n = r^n e^{in\theta}$$
$$z^m = r^m e^{in\theta}$$

- Untuk $n = m + 1$

$$z^{m+1} = z^m . z$$
$$z^{m+1} = (r^m e^{im\theta})(re^{i\theta})$$
$$z^{m+1} = (r^{(m+1)} e^{i(m+1)\theta})$$

Dengan demikian, Persamaan (4) terbukti benar jika n adalah bilangan bulat positif. Hal ini juga berlaku ketika $n = 0$, dengan $z = 1$. Jika $n = -1, -2, \dots$ dan z^n didefinisikan dalam hal kebalikan perkalian z, maka $z^n = z^{(-1)m}$ dengan $m = -n = 1, 2, \dots$

Karena persamaan (4) berlaku untuk bilangan bulat positif, maka dari eksponensial bentuk (3) z^{-1} bahwa

$$z^n = \left[\frac{1}{r} e^{i(-\theta)}\right]^m = \left(\frac{1}{r}\right)^{-n} e^{i(-n)(-\theta)} = r^n e^{n\theta}$$

Note:

a. Persamaan (4) berlaku untuk setiap n elemen bilangan bulat.
b. Persamaan (4) dapat berguna untuk mencari pangkat dari bilangan kompleks.

Example:

Sederhanakan bentuk $(\sqrt{3} + i)^7$

$$r = \sqrt{(\sqrt{3}) + 1^2} = 2$$

$$\theta = arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$$

Sehingga bentuk eksponensialnya, $z = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$

Rumus De Moivre menyatakan, $z^n = r^n e^{in\theta}$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{3} + i\right)^7 = \left(2e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^7$$

$$\left(\sqrt{3} + i\right)^7 = 2^7 e^{i\frac{7\pi}{6}}$$

$$\left(\sqrt{3} + i\right)^7 = 128\left(cos\frac{7\pi}{6} + i\,sin\frac{7\pi}{6}\right)$$

$$\left(\sqrt{3} + i\right)^7 = 128\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)$$

$$\left(\sqrt{3} + i\right)^7 = -64\sqrt{3} - 64i$$

$$\left(\sqrt{3} + i\right)^7 = -64(\sqrt{3} + i)$$

Dengan menggunakan bentuk eksponensial dan rumus De Moivre, diperoleh:

$$\left(\sqrt{3} + i\right)^7 = -64(\sqrt{3} + i)$$

3. Argumen Hasil Kali dan Bagi

If $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ and $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$, the expression

Jika $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ dan $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$, pernyataan

(1)

$$z_1 z_2 = (r_1 r_2) e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

in Sec. 7 can be used to obtain an important identity involving arguments:

Dapat digunakkan untuk mendapatkan identitas yang melibatkan argument:

(2)

$$\arg\arg(z_1 z_2) = \arg\arg z_1 + \arg\arg z_2$$

This result is to be interpreted as saying that if values of two of the three (multiple-valued) arguments are specified, then there is a value of the third such that the equation holds.

Hasil ini dapat diinterprestasikan dengan mengatakan bahwa jika nilai dari dua dari tiga argument (bernilai ganda) ditentukan, maka terdapat nilai dari argument ketiga yang memenuhi persamaan tersebut.

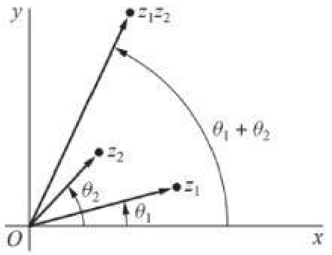

FIGURE 9

We start the verification of statement (2) by letting θ_1 and θ_2 denote any values of arg z_1 and arg z_2, respectively. Expression (1) then tells us that $\theta_1 + \theta_2$ is a value of $\arg(z_1z_2)$. (See Fig. 9.) If, on the other hand, values of $\arg(z_1z_2)$ and z_1 Arg z_1 ditentukan, nilai tersebut sesuai dengan pilihan tertentu dari n dan n_1 dalam ekspresi

Kita memulai verifikasi pernyataan (2) dengan membiarkkan θ_1 dan θ_2 masing-masing menunjukkan nilai $\arg\arg z_1$ dan $\arg\arg z_2$. Ekspresi (1) kemudian memberitahu kita bahwa $\theta_1 + \theta_2$ adalah nilai $\arg\arg(z_1z_2)$. (Lihat Gambar 9) Sebaliknya, jika nilai $\arg\arg(z_1z_2)$ dan z_1 ditentukan, nilai tersebut sesuai dengan pilihan tertentu dari n dan n_1 dalam ekspresi

$$\arg\arg(z_1z_2) = (\theta_1 + \theta_2) + 2n\pi \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Dan

$$\arg\arg z_1 = \theta_1 + 2n_1\pi \qquad (n_1 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Karena

$$(\theta_1 + \theta_2) + 2n\pi = (\theta_1 + 2n_1\pi) + [\theta_2 + 2(n - n_1)\pi]$$

equation (2) is evidently satisfied when the value

Persamaan (2) ternyata terpenuhi Ketika nilainya

$$\arg\arg z_2 = \theta_2 + 2(n - n_1)\pi$$

is chosen. Verification when values of $\arg(z_1z_2)$ and $\arg z_2$ are specified follows by symmetry.

Terpilih. Verifikasi Ketika nilai $\arg\arg(z_1 z_2)$ dan $\arg\arg z_2$ ditentukan mengikuti simetri.

Example:

Ketika $z_1 = -1$ dan $z_2 = i$,

$$\arg\arg(z_1 z_2) = \arg\arg(-i) = -\frac{\pi}{2}$$

Tetapi

$$\arg\arg(z_1) + \arg\arg(z_2) = \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$$

If, however, we take the values of arg z_1 and arg z_2 just used and select the value of $\arg(z_1 z_2)$,

Persamaan dapat terpenuhi jika nilai $\arg z_1$ dan $\arg z_2$ digunakan dan memilih nilai $\arg\arg(z_1 z_2)$ sehingga

$$\arg\arg(z_1) + \arg\arg(z_2) = \arg\arg(z_1 z_2) = (z_1 z_2) + 2n\pi = (z_1 z_2) + 2\pi = -\frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{3\pi}{2}$$

We find that equation (2) is satisfied

Pernyataan (2) menyatakan bahwa

$$\arg\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg\arg(z_1 {z_2}^{-1}) = \arg\arg(z_1) + \arg\arg({z_2}^{-1})$$

Oleh karena

$${z_2}^{-1} = \frac{1}{r^2} {e_2}^{-i\theta}$$

Maka

$$\arg\arg({z_2}^{-1}) = -\arg\arg z_2$$

Sehingga

$$\arg\arg\left(\frac{z_1}{z_1}\right) = \arg\arg z_1 - \arg\arg z_2$$

4. Akar Pangkat dalam Bilangan Kompleks

Consider now a point $z = re^{i\theta}$, lying on a circle centered at the origin with radius r (Fig. 10). As θ is increased, z moved around the circle in the counterclockwise direction. In particular, when θ is increated by 2π, we arrive at the original point; and the same is true when θ is decreased by 2π. It is, therefore, evident from Fig. 10 that two nonzero complex numbers

Perhatikan suatu titik $z = re^{i\theta}$, terletak pada lingkaran yang berpusat pada titik asal dengan jari-jari r (Gambar 10). Saat θ bertambah, z bergerak mengelilingi lingkaran dengan berlawanan arah jarum jam. Dalam keadaan tertentu, ketika θ bertambah hingga 2π, maka akan sampai pada titik semula dan sama halnya ketika θ berkuran hingga 2π. Oleh karena itu, terbukti dari Gambar 1 bahwa dua bilangan kompleks bukan nol

$\mathrm{z}_1 = \mathrm{r}_1\mathrm{e}^{i\theta_1}$ dan $\mathrm{z}_2 = \mathrm{r}_2\mathrm{e}^{i\theta_2}$

are equal if and only if

adalah sama jika dan hanya jika

$\mathrm{r}_1 = \mathrm{r}_2$ dan $\theta_1 = \theta_2 + 2\mathrm{k}\pi$,

where k is some integer

dimana k adalah anggota himpunan bilangan bulat ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$)

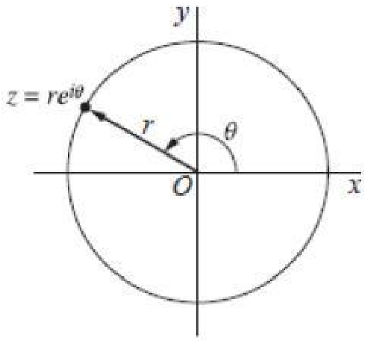

FIGURE 10

This observation, together with the expression $z^n = r^n e^{in\theta}$ in Sec. 7 for integral powers of complex numbers $z = re^{i\theta}$, is useful in finding the nth roots of any nonzero complex number $\mathrm{z}_0 = \mathrm{r}_0\mathrm{e}^{i\theta_0}$, where n has one of the values $n = 2, 3, \ldots$. The method starts whit the fact that an nth root of z_0 is a nonzero number $z = re^{i\theta}$ such that $z^n = \mathrm{z}_0$, atau

$$r^n e^{in\theta} = \mathrm{r}_0\mathrm{e}^{i\theta_0}.$$

Pada pengamatan ini, bersama dengan pernyataan $z^n = r^n e^{in\theta}$ pada Bagian 7 untuk pangkat integral bilangan kompleks $z = re^{i\theta}$, berguna untuk menemukan akar pangkat n dari setiap bilangan kompleks tak nol $\mathrm{z}_0 = \mathrm{r}_0\mathrm{e}^{i\theta_0}$, dimana n merupakan salah satu nilai dari $n = 2, 3, \ldots$. Metode ini dimulai dengan fakta bahwa suatu akar pangkat n dari z_0 adalah suatu bilangan tak nol $z = re^{i\theta}$ sedemikian sehingga $z^n = z_0$, atau

$r^n e^{in\theta} = r_0 e^{i\theta_0}$.

According to the statement in italics just above, then,

$\boldsymbol{r^n = r_0}$ **and** $\boldsymbol{n\theta = \theta_0 + 2k\pi}$**,**

Where k is any integer $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. So $r = \sqrt[n]{r_0}$, where the radical denotes the unique positive nth root of the positive real number r_0, and

$$\boldsymbol{\theta = \frac{\theta_0 + 2k\pi}{n} = \frac{\theta_0}{n} = \frac{2k\pi}{n} \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).}$$

Berdasarkan pernyataan yang dicetak miring di atas, maka,

$r^n = r_0$ and $n\theta = \theta_0 + 2k\pi$,

Dimana k merupakan sembarang anggota himpunan bilangan bulat $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Jadi $r = \sqrt[n]{r_0}$, dimana jari-jari tersebut menunjukkan akar pangkat n dari bilangan riil positif r_0 adalah Tunggal positif, dan

$$\theta = \frac{\theta_0 + 2k\pi}{n} = \frac{\theta_0}{n} = \frac{2k\pi}{n} \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Consequently, the complex numbers

$$\boldsymbol{z = \sqrt[n]{r_0} \exp\left[i\left(\frac{\theta_0}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right] \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).}$$

are the nth roots of z_0. We are able to see immediately from this exponential form of the roots that they all lie on the circle $|z| = \sqrt[n]{r_0}$ about the origin and are equally spaced every $\frac{2\pi}{n}$ radians, starting with argument $\frac{\theta_0}{n}$. Evidently, then, all of the *distinct* roots are obtained when $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, and no further roots arise with other values of k. We let $\boldsymbol{c_k}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$ denote these distinct roots and write

$$\textbf{(1)} \quad \boldsymbol{c_k = \sqrt[n]{r_0} \exp\left[i\left(\frac{\theta_0}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right] \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).}$$

Akibatnya, bilangan kompleks

$$z = \sqrt[n]{r_0} \exp\left[i\left(\frac{\theta_0}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right] \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Merupakan akar pangkat n dari z_0. Kita bisa langsung melihat dari bentuk akar eksponensial ini bahwa mereka semua terletak pada lingkaran $|z| = \sqrt[n]{r_0}$ sekitar titik asal dan berjarak sama setiap $\frac{2\pi}{n}$ radian, dimulai dengan argument

$\frac{\theta_0}{n}$. Terbukti, maka, semua akar pangkat berlainan diperoleh ketika $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$, dan tidak ada lagi akar pangkat yang muncul dengan nilai lain dari k. Kita misalkan c_k $(k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$ menunjukkan akar pangkat berlainan dan tuliskan

(1) $\quad c_k = \sqrt[n]{r_0} \exp\left[i\left(\frac{\theta_0}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right] \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$

(Lihat Gambar 2)

(See Fig. 11.)

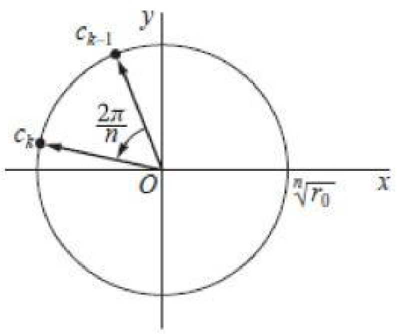

FIGURE 11

The number $\sqrt[n]{r_0}$ is the length of each of the radius vectors representing the n roots. The first root c_0 has argument $\frac{\theta_0}{n}$; and the two roots when $n = 2$ lie at the opposite ends of a diameter of the circle $|z| = \sqrt[n]{r_0}$, the second root being $-c_0$. When $n \geq 3$, the roots lie at the vertices of a regular polygon of n sides inscribed in that circle

Bilangan $\sqrt[n]{r_0}$ merupakan panjang dari masing-masing vector jari-jari yang dilambangkan akar pangkat n. Akar pangkat pertama c_0 memiliki argumen $\frac{\theta_0}{n}$; dan dua akar pangkat ketika $n = 2$ terletak pada ujung yang berlawanan dari suatu diameter pada lingkaran $|z| = \sqrt[n]{r_0}$, akar pangkat kedua adalah $-c_0$. Ketika $n \geq 3$, akarnya terletak pada sudut suatu polygon segi-n beraturan yang tertulis dalam lingkaran tersebut.

We shall let $z_0^{\frac{1}{n}}$ denote the *set* of nth roots of z_0. If, in particular, z_0 is a positive real number r_0, the symbol $r_0^{\frac{1}{n}}$ denotes the entire set of roots; and the symbol $\sqrt[n]{r_0}$ in expression (1) is reserved for the one positive root. When the value of

θ_0 that is used in expression (1) is the principal value of arg $z_0(-\pi < \theta_0 \leq \pi)$, the number c_0 is referred to as the *principal root.* Thus when z_0 is a positive real number r_0, its principal root is $\sqrt[n]{r_0}$.

Kita akan memisalkan ${z_0}^{\frac{1}{n}}$ yang menunjukkan himpunan akar pangkat n dari z_0. Jika, dalam suatu kondisi tertentu, z_0 merupakan suatu bilangan riil positif r_0, simbol ${r_0}^{\frac{1}{n}}$ menunjukkan seluruh himpunan akar pangkat; dan simbol $\sqrt[n]{r_0}$ dalam pernyataan (1) disimpan untuk satu akar positif. Ketika nilai dari θ_0 digunakan dalam pernyataan (1) adalah merupakan nilai utama dari argument $z_0(-\pi < \theta_0 \leq \pi)$, bilangan c_0 disebut sebagai akar utama. Jadi, ketika z_0 merupakan bilanagan riil positif r_0, akar utama adalah $\sqrt[n]{r_0}$.

Observe that if we write expression (1) for the roots of z_0 as

$$\boldsymbol{c_k = \sqrt[n]{r_0} \exp\left(i\frac{\theta}{n}\right) \exp\left(i\frac{2k\pi}{n}\right) \qquad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1)}$$

and also write

$$\textbf{(2)} \qquad \boldsymbol{\omega_n = \exp\left(i\frac{2\pi}{n}\right)}$$

It follows from property (5), Sec. 7 of $e^{i\theta}$ that

$$\text{(3)} \qquad \boldsymbol{\omega_n^k = \exp\left(i\frac{2k\pi}{n}\right) \qquad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1)}$$

and hence that

$$\text{(4)} \qquad \boldsymbol{c_k = c_0\, \omega_n^k \qquad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1)}$$

The number $\boldsymbol{c_0}$ here can, of course, be replaced by any particular nth root of z_0, since ω_n represents a counterclockwise rotation through $\frac{2\pi}{n}$ radians.

Perhatikan bahwa jika kita menuliskan pernyataan (1) untuk akar pangkat dari z_0 seperti

$$c_k = \sqrt[n]{r_0} \exp\left(i\frac{\theta}{n}\right) \exp\left(i\frac{2k\pi}{n}\right) \qquad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$$

dan juga menuliskan

$$(2) \qquad \omega_n = \exp\left(i\frac{2\pi}{n}\right)$$

hal tersebut mengikuti sifat (5), Bagian 7 dari $e^{i\theta}$ bahwa

(3) $\omega_n^k = \exp\left(i\frac{2k\pi}{n}\right) \qquad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$

dan karena itu

(4) $c_k = c_0\,\omega_n^k \qquad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$

Bilangan c_0 di sini, tentu dapat diganti dengan sembarang akar pangkat n tertentu dari z_0, karena ω_n menunjukkan suatu rotasi berlawanan arah jarum jam melalui $\frac{2\pi}{n}$ radian.

Finally, a convenient way to remember expression (1) is to write z_0 in its most general exponential form (compare with Example 2 in Sec. 6)

(5) $\boldsymbol{z_0 = \mathrm{r}_0 \mathrm{e}^{i(\theta_0+2k\pi)} \qquad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1)}$

and to *formally* apply laws of fractional exponents involving real numbers, keeping in mind that there are precisely n roots:

$$z_0^{\frac{1}{n}} = \left[\mathbf{r}_0 \mathbf{e}^{i(\theta_0+2k\pi)}\right]^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{r_0}\,\mathbf{exp}\left[i\left(\frac{\theta_0+2k\pi}{n}\right)\right] = \sqrt[n]{r_0}\,\mathbf{exp}\left[i\left(\frac{\theta_0}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)\right] \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$$

Terakhir, cara mudah untuk mengingat pernyataan (1) yaitu dengan menulis z_0 dalam bentuk eksponensial yang paling umu (bandingkan dengan Contoh 2 dalam Bagian 6)

(5) $z_0 = \mathrm{r}_0 \mathrm{e}^{i(\theta_0+2k\pi)} \qquad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$

dan secara formal menerapkan hukum eksponen pecahan yang melibatkan bilangan riil, dengan mengingat bahwa ada akar pangkat n yang tepat.

$$z_0^{\frac{1}{n}} = \left[\mathrm{r}_0 \mathrm{e}^{i(\theta_0+2k\pi)}\right]^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{r_0}\,\exp\left[i\left(\frac{\theta_0+2k\pi}{n}\right)\right] = \sqrt[n]{r_0}\,\exp\left[i\left(\frac{\theta_0}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)\right] \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$$

Contoh-contoh pada bagian selanjutnya berfungsi untuk mengilustrasikan metode ini untuk mencari akar bilangan kompleks.

Example:

Tentukan nilai dari$(-8i)^{\frac{1}{3}}$!

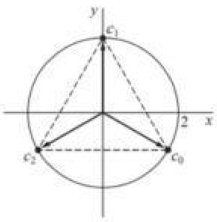

FIGURE 12

Mengubah ke bentuk polar:

$x = 0, y = -8$

$r = \sqrt{0 + 64} = 8$

$\theta = arctan\left(\frac{-8}{0}\right) = -\frac{\pi}{2}$

$$z_0^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{r_0} exp\left[i\left(\frac{\theta_0}{n} + \frac{2kn}{n}\right)\right]$$

$$(-8i)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} exp\left[i\left(-\frac{\pi/2}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right]$$

$$= 2exp\left[i\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right]$$

$$= 2exp\left[cos\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right) i\ sin\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right]$$

Substitusi nilai $k = 0, 1, 2)$

$(-8i)^{\frac{1}{3}} = 2\left[cos\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right) i\ sin\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right]$

- Untuk $k = 0$

  $c_0 = 2\left[cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) i\ sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$

  $= 2\left[\frac{\sqrt{3}}{2} + i\left(\frac{1}{2}\right) - 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + i2\left(\frac{1}{2}\right)\right]$

  $= \sqrt{3} - i$

- Untuk $k = 1$

  $c_1 = 2\left[cos\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right) i\ sin\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right)\right]$

$= 2\left[cos\left(\frac{\pi}{2}\right) i\ sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$

$= 2i$

- Untuk $k = 2$

  $c_3 = 2\left[cos\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{3}\right) i\ sin\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{3}\right)\right]$

  $= 2\left[cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) i\ sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right]$

  $= 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)$

  $= -\sqrt{3} - i$

5. Daerah pada Bidang Kompleks

In this section, we are concerned with sets of complex numbers, or points in the z plane, and their closeness to one another. Our basic tool is the concept of an ε *neighborhood*

(1) $$|z - z_0| < \varepsilon$$

Pada bagian ini, kita akan membahas tentang himpunan bilangan kompleks, atau titik-titik di dalam bidang z dan hubungan antara satu dengan yang lain. Pedoman dasar adalah konsep daerah persekitaran ε

(1) $|z - z_0| < \varepsilon$

of a given point z_0. It consists of all points z lying inside but not on a circlen centered at z_0 and with a specified positive radius ε (Fig. 15). When the value of ε is understood or is immaterial in the discussion, the set (1) is often referred to as just a neighborhood. Occasionally, it is convenient to speak of a *deleted neighborhood*, or punctured disk,

(2) $$0 < |z - z_0| < \varepsilon$$

consisting of all points z in an ε neighborhood of z_0 except for the point z_0 itself.