



**BENTUK EKSPONEN, PERKALIAN DALAM BENTUK
EKSPONEN, HASIL KALI DAN BAGI, BENTUK PANGKAT
DALAM BILANGAN KOMPLEKS, DAERAH PADA
BILANGAN KOMPLEKS**

*Makalah Ini Disusun Guna Memenuhi Tugas Mata Kuliah Analisa Variabel
Kompleks*

Dosen Pengampu:

Dr. Frenza Fairuz Firmansyah S.Pd. M.Pd.

Saddam Hussien S.Pd. M.Pd.

Disusun Oleh Kelompok 2:

Mochammad Indra Akbar

240210101013

Natasya Aprilia

240210101144

Kayla Nuril Firdausin Nuzula

240210101149

**PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS JEMBER**

2025

1. Bentuk Eksponen

Misalkan r dan θ koordinat kutub pada titik (x, y) yang sesuai dengan bilangan kompleks bukan nol $z = x + iy$. Karena $x = r \cos \theta$ dan $y = r \sin \theta$, bilangan z dapat dituliskan dalam bentuk kutub sebagai

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta).$$

Jika $z = 0$, koordinat θ tidak terdefinisi; dan dapat dipahami bahwa $z \neq 0$ setiap kali koordinat kutub digunakan.

Dalam Analisa kompleks, bilangan real r , tidak boleh negatif dan merupakan Panjang vector jari-jari untuk z ; yaitu, $r = |z|$. Bilangan real θ mewakili sudut, diukur dalam radian, yang dibuat z dengan sumbu real positif. Ketika z diinterpretasikan sebagai vektor radius (gambar 6)

Seperti dalam kalkulus, θ memiliki jumlah nilai yang mungkin tak terhingga, termasuk yang negatif, yang berbeda dengan kelipatan integral 2π . Nilai tersebut dapat ditentukan dari persamaan $\tan \theta = \frac{y}{x}$, Dimana kuadran yang memuat titik yang bersesuaian dengan z harus ditentukan. Setiap nilai θ disebut argument z , dan himpunan semua nilai tersebut dilambangkan dengan z , adalah nilai unik θ sedemikian rupa sehingga $-\pi < \theta \leq \pi$. Terbukti, kemudian,

$$\arg z = \theta + 2n\pi$$

$$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Juga, ketika z adalah bilangan real negatif, z memiliki nilai π , bukan $-\pi$

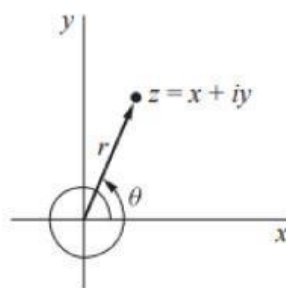


FIGURE 6

Simbol $e^{i\theta}$, atau $(i\theta)$ didefinisikan dengan Rumus *Euler* sebagai:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

Dimana θ diukur dalam radian. Hal ini memungkinkan seseorang untuk menulis bentuk polar lebih kompak dalam bentuk eksponensial sebagai

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta}$$

Example:

Nyatakan bilangan kompleks $z = 1 + i$ dalam bentuk polar dan bentuk eksponen!

Solusi:

Diketahui:

$$\begin{aligned}x &= 1, & y &= 1 \\r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\r &= \sqrt{1^2 + 1^2} \\r &= \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}\end{aligned}$$

Cari θ :

$$\begin{aligned}\tan \theta &= \frac{y}{x} \\ \tan \theta &= \frac{1}{1} = 1 \\ \theta &= 45^\circ = \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

(Karena di kuadran pertama)

Bentuk polar:

$$\begin{aligned}z &= r(\cos \theta + i \sin \theta) \\ z &= \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)\end{aligned}$$

Bentuk eksponen:

$$\begin{aligned}z &= re^{i\theta} \\ z &= \sqrt{2}e^{i\pi/4}\end{aligned}$$

2. Hasil Kali dan Pangkat dalam Bentuk Eksponen

A. Sifat Perkalian Eksponensial

Diketahui rumus Euler:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

Untuk dua sudut θ_1 dan θ_2 berlaku:

$$\begin{aligned}e^{i\theta_1}e^{i\theta_2} &= (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \\ &= (\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i(\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2) \\ &= \cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2) = e^{i(\theta_1 + \theta_2)}\end{aligned}$$

B. Perkalian, Pembagian, dan Invers Bilangan Kompleks

Misalkan:

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1}, z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$$

a. Perkalian

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)} \dots (1)$$

b. Pembagian

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{e^{i\theta_1} e^{-i\theta_2}}{e^{i\theta_2} e^{-i\theta_2}} = \frac{e^{i(\theta_1 - \theta_2)}}{e^{i0}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)} \dots (2)$$

c. Invers

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1 e^{i0}}{r e^{i\theta}} = \frac{1}{r} e^{-i\theta} \dots (3)$$

C. Perpangkatan Bilangan Kompleks

Misalkan:

$$z = r e^{i\theta}$$

Adib:

$$z^n = r^n e^{in\theta}, (\forall n \in \mathbb{Z}) \dots (4)$$

Akan dibuktikan dengan induksi

- Untuk $n = 1$

$$z^n = r^n e^{in\theta}$$

$$z^1 = r^1 e^{i1\theta}$$

$$z = r e^{i\theta}$$

- Asumsikan benar untuk $n = m$

$$z^n = r^n e^{in\theta}$$

$$z^m = r^m e^{im\theta}$$

- Untuk $n = m + 1$

$$z^{m+1} = z^m \cdot z$$

$$z^{m+1} = (r^m e^{im\theta})(r e^{i\theta})$$

$$z^{m+1} = (r^{(m+1)} e^{i(m+1)\theta})$$

Dengan demikian, Persamaan (4) terbukti benar jika n adalah bilangan bulat positif. Hal ini juga berlaku ketika $n = 0$, dengan $z = 1$. Jika $n = -1, -2, \dots$ dan z^n didefinisikan dalam hal kebalikan perkalian z , maka $z^n = z^{(-1)^m}$ dengan $m = -n = 1, 2, \dots$

Karena persamaan (4) berlaku untuk bilangan bulat positif, maka dari eksponensial bentuk (3) z^{-1} bahwa

$$z^n = \left[\frac{1}{r} e^{i(-\theta)} \right]^m = \left(\frac{1}{r} \right)^{-n} e^{i(-n)(-\theta)} = r^n e^{n\theta}$$

Note:

- Persamaan (4) berlaku untuk setiap n elemen bilangan bulat.
- Persamaan (4) dapat berguna untuk mencari pangkat dari bilangan kompleks.

Example:

Sederhanakan bentuk $(\sqrt{3} + i)^7$

$$r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$$

Sehingga bentuk eksponensialnya, $z = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$

Rumus De Moivre menyatakan, $z^n = r^n e^{in\theta}$

$$\Rightarrow (\sqrt{3} + i)^7 = \left(2e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^7$$

$$(\sqrt{3} + i)^7 = 2^7 e^{i\frac{7\pi}{6}}$$

$$(\sqrt{3} + i)^7 = 128 \left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} \right)$$

$$(\sqrt{3} + i)^7 = 128 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right)$$

$$(\sqrt{3} + i)^7 = -64\sqrt{3} - 64i$$

$$(\sqrt{3} + i)^7 = -64(\sqrt{3} + i)$$

Dengan menggunakan bentuk eksponensial dan rumus De Moivre, diperoleh:

$$(\sqrt{3} + i)^7 = -64(\sqrt{3} + i)$$

3. Argumen Hasil Kali dan Bagi

Jika $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ dan $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$, pernyataan

(1)

$$z_1 z_2 = (r_1 r_2) e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

Dapat digunakan untuk mendapatkan identitas yang melibatkan argument:

(2)

$$\arg \arg(z_1 z_2) = \arg \arg z_1 + \arg \arg z_2$$

Hasil ini dapat diinterpretasikan dengan mengatakan bahwa jika nilai dari dua dari tiga argument (bernilai ganda) ditentukan, maka terdapat nilai dari argument ketiga yang memenuhi persamaan tersebut.

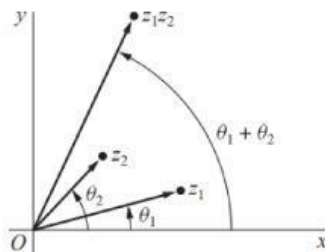


FIGURE 9

Kita memulai verifikasi pernyataan (2) dengan membiarkan θ_1 dan θ_2 masing-masing menunjukkan nilai $\arg \arg z_1$ dan $\arg \arg z_2$. Ekspresi (1) kemudian memberitahu kita bahwa $\theta_1 + \theta_2$ adalah nilai $\arg \arg(z_1 z_2)$. (Lihat Gambar 9) Sebaliknya, jika nilai $\arg \arg(z_1 z_2)$ dan z_1 ditentukan, nilai tersebut sesuai dengan pilihan tertentu dari n dan n_1 dalam ekspresi

$$\arg \arg(z_1 z_2) = (\theta_1 + \theta_2) + 2n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Dan

$$\arg \arg z_1 = \theta_1 + 2n_1\pi \quad (n_1 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Karena

$$(\theta_1 + \theta_2) + 2n\pi = (\theta_1 + 2n_1\pi) + [\theta_2 + 2(n - n_1)\pi]$$

Persamaan (2) ternyata terpenuhi Ketika nilainya

$$\arg \arg z_2 = \theta_2 + 2(n - n_1)\pi$$

Terpilih. Verifikasi Ketika nilai $\arg \arg(z_1 z_2)$ dan $\arg \arg z_2$ ditentukan mengikuti simetri.

Example:

Ketika $z_1 = -1$ dan $z_2 = i$,

$$\arg \arg(z_1 z_2) = \arg \arg(-i) = -\frac{\pi}{2}$$

Tetapi

$$\arg \arg(z_1) + \arg \arg(z_2) = \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$$

Persamaan dapat terpenuhi jika nilai $\arg z_1$ dan $\arg z_2$ digunakan dan memilih nilai $\arg \arg(z_1 z_2)$ sehingga

$$\arg \arg(z_1) + \arg \arg(z_2) = \arg \arg(z_1 z_2) = (z_1 z_2) + 2n\pi = (z_1 z_2) + 2\pi = -\frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{3\pi}{2}$$

Pernyataan (2) menyatakan bahwa

$$\arg \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg \arg(z_1 z_2^{-1}) = \arg \arg(z_1) + \arg \arg(z_2^{-1})$$

Oleh karena

$$z_2^{-1} = \frac{1}{r^2} e^{-i\theta}$$

Maka

$$\arg \arg(z_2^{-1}) = -\arg \arg z_2$$

Sehingga

$$\arg \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg \arg z_1 - \arg \arg z_2$$

4. Akar dalam Bilangan Kompleks

Perhatikan suatu titik $z = re^{i\theta}$, terletak pada lingkaran yang berpusat pada titik asal dengan jari-jari r (Gambar 10). Saat θ bertambah, z bergerak mengelilingi lingkaran dengan berlawanan arah jarum jam. Dalam keadaan tertentu, ketika θ bertambah hingga 2π , maka akan sampai pada titik semula dan sama halnya ketika θ berkurang hingga 2π . Oleh karena itu, terbukti dari Gambar 1 bahwa dua bilangan kompleks bukan nol

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1} \text{ dan } z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$$

adalah sama jika dan hanya jika

$$r_1 = r_2 \text{ dan } \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi,$$

dimana k adalah anggota himpunan bilangan bulat ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

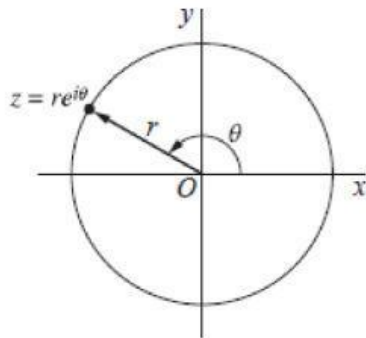


FIGURE 10

Pada pengamatan ini, bersama dengan pernyataan $z^n = r^n e^{in\theta}$ pada Bagian 7 untuk pangkat integral bilangan kompleks $z = re^{i\theta}$, berguna untuk menemukan akar pangkat n dari setiap bilangan kompleks tak nol $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$, dimana n merupakan salah satu nilai dari $n = 2, 3, \dots$. Metode ini dimulai dengan fakta bahwa suatu akar pangkat n dari z_0 adalah suatu bilangan tak nol $z = re^{i\theta}$ sedemikian sehingga $z^n = z_0$, atau $r^n e^{in\theta} = r_0 e^{i\theta_0}$.

Berdasarkan pernyataan yang dicetak miring di atas, maka,

$$r^n = r_0 \text{ and } n\theta = \theta_0 + 2k\pi,$$

Dimana k merupakan sembarang anggota himpunan bilangan bulat ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Jadi $r = \sqrt[n]{r_0}$, dimana jari-jari tersebut menunjukkan akar pangkat n dari bilangan riil positif r_0 adalah Tunggal positif, dan

$$\theta = \frac{\theta_0 + 2k\pi}{n} = \frac{\theta_0}{n} + \frac{2k\pi}{n} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Akibatnya, bilangan kompleks

$$z = \sqrt[n]{r_0} \exp \left[i \left(\frac{\theta_0}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) \right] \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Merupakan akar pangkat n dari z_0 . Kita bisa langsung melihat dari bentuk akar eksponensial ini bahwa mereka semua terletak pada lingkaran $|z| = \sqrt[n]{r_0}$ sekitar titik asal dan berjarak sama setiap $\frac{2\pi}{n}$ radian, dimulai dengan argument $\frac{\theta_0}{n}$. Terbukti, maka, semua akar pangkat berlainan diperoleh ketika $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$, dan tidak ada lagi akar pangkat yang muncul dengan nilai lain dari k . Kita misalkan c_k ($k = 0, 1, 2, \dots, n-1$) menunjukkan akar pangkat

berlainan dan tuliskan

$$(1) \quad c_k = \sqrt[n]{r_0} \exp \left[i \left(\frac{\theta_0}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) \right] \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

(Lihat Gambar 2)

(See Fig. 11.)

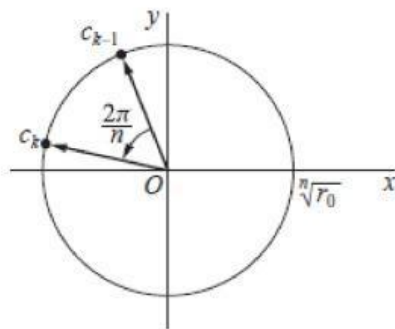


FIGURE 11

Bilangan $\sqrt[n]{r_0}$ merupakan panjang dari masing-masing vector jari-jari yang dilambangkan akar pangkat n . Akar pangkat pertama c_0 memiliki argumen $\frac{\theta_0}{n}$; dan dua akar pangkat ketika $n = 2$ terletak pada ujung yang berlawanan dari suatu diameter pada lingkaran $|z| = \sqrt[n]{r_0}$, akar pangkat kedua adalah $-c_0$. Ketika $n \geq 3$, akarnya terletak pada sudut suatu polygon segi- n beraturan yang tertulis dalam lingkaran tersebut.

Kita akan memisalkan $z_0^{\frac{1}{n}}$ yang menunjukkan himpunan akar pangkat n dari z_0 . Jika, dalam suatu kondisi tertentu, z_0 merupakan suatu bilangan riil positif r_0 , simbol $r_0^{\frac{1}{n}}$ menunjukkan seluruh himpunan akar pangkat; dan simbol $\sqrt[n]{r_0}$ dalam pernyataan (1) disimpan untuk satu akar positif. Ketika nilai dari θ_0 digunakan dalam pernyataan (1) adalah merupakan nilai utama dari argument z_0 ($-\pi < \theta_0 \leq \pi$), bilangan c_0 disebut sebagai akar utama. Jadi, ketika z_0 merupakan bilangan riil positif r_0 , akar utama adalah $\sqrt[n]{r_0}$.

Perhatikan bahwa jika kita menuliskan pernyataan (1) untuk akar pangkat dari z_0 seperti

$$c_k = \sqrt[n]{r_0} \exp \left(i \frac{\theta}{n} \right) \exp \left(i \frac{2k\pi}{n} \right) \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$$

dan juga menuliskan

$$(2) \quad \omega_n = \exp\left(i \frac{2\pi}{n}\right)$$

hal tersebut mengikuti sifat (5), Bagian 7 dari $e^{i\theta}$ bahwa

$$(3) \quad \omega_n^k = \exp\left(i \frac{2k\pi}{n}\right) \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$$

dan karena itu

$$(4) \quad c_k = c_0 \omega_n^k \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$$

Bilangan c_0 di sini, tentu dapat diganti dengan sembarang akar pangkat n tertentu dari z_0 , karena ω_n menunjukkan suatu rotasi berlawanan arah jarum jam melalui $\frac{2\pi}{n}$ radian.

Terakhir, cara mudah untuk mengingat pernyataan (1) yaitu dengan menulis z_0 dalam bentuk eksponensial yang paling umum (bandingkan dengan Contoh 2 dalam Bagian 6)

$$(5) \quad z_0 = r_0 e^{i(\theta_0 + 2k\pi)} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$$

dan secara formal menerapkan hukum eksponen pecahan yang melibatkan bilangan riil, dengan mengingat bahwa ada akar pangkat n yang tepat.

$$z_0^{\frac{1}{n}} = [r_0 e^{i(\theta_0 + 2k\pi)}]^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{r_0} \exp\left[i \left(\frac{\theta_0 + 2k\pi}{n}\right)\right] = \sqrt[n]{r_0} \exp\left[i \left(\frac{\theta_0}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right] \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$$

Contoh-contoh pada bagian selanjutnya berfungsi untuk mengilustrasikan metode ini untuk mencari akar bilangan kompleks.

Example:

Tentukan nilai dari $(-8i)^{\frac{1}{3}}$!

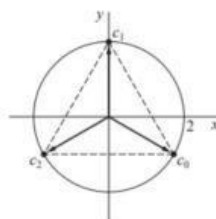


FIGURE 12

Mengubah ke bentuk polar:

$$x = 0, y = -8$$

$$r = \sqrt{0 + 64} = 8$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{-8}{0}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

$$z_0^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{r_0} \exp\left[i\left(\frac{\theta_0}{n} + \frac{2kn}{n}\right)\right]$$

$$(-8i)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} \exp\left[i\left(-\frac{\pi/2}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right]$$

$$= 2 \exp\left[i\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right]$$

$$= 2 \exp\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right) i \sin\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right]$$

Substitusi nilai $k = 0, 1, 2$

$$(-8i)^{\frac{1}{3}} = 2 \left[\cos\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right) i \sin\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right) \right]$$

- Untuk $k = 0$

$$\begin{aligned} c_0 &= 2 \left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \right] \\ &= 2 \left[\frac{\sqrt{3}}{2} + i \left(\frac{1}{2}\right) - 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + i 2 \left(\frac{1}{2}\right) \right] \\ &= \sqrt{3} - i \end{aligned}$$

- Untuk $k = 1$

$$\begin{aligned} c_1 &= 2 \left[\cos\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right) i \sin\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right) \right] \\ &= 2 \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right] \\ &= 2i \end{aligned}$$

- Untuk $k = 2$

$$\begin{aligned} c_2 &= 2 \left[\cos\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3}\right) i \sin\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3}\right) \right] \\ &= 2 \left[\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) i \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right) \\
 &= -\sqrt{3} - i
 \end{aligned}$$

5. Daerah pada Bidang Kompleks

Pada bagian ini, kita akan membahas tentang himpunan bilangan kompleks, atau titik-titik di dalam bidang z dan hubungan antara satu dengan yang lain. Pedoman dasar adalah konsep daerah persekitaran ε

$$(1) \quad |z - z_0| < \varepsilon$$

Dari titik tertentu z_0 . Himpunan terdiri dari semua titik z yang terletak di dalam tetapi tidak pada lingkaran yang berpusat pada z_0 dan dengan radius positif tertentu ε (Gambar. 15)

Ketika nilai ε sudah dipahami atau tidak ada dalam pembahasan, himpunan (1) sering disebut sebagai sebuah persekitaran. Kadang-kadang, lebih mudah untuk berbicara tentang persekitaran yang dihapus, atau cakram yang tertusuk,

$$(2) \quad 0 < |z - z_0| < \varepsilon$$

Yang terdiri dari semua titik z di ε persekitaran z_0 kecuali untuk titik z_0 itu sendiri.

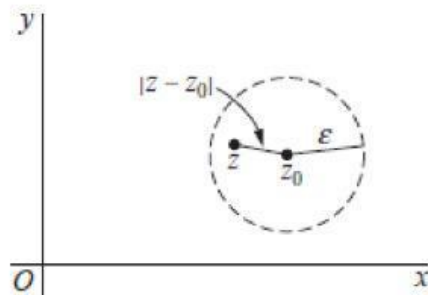


FIGURE 15

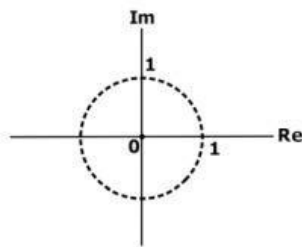
Titik z_0 dikatakan sebagai titik interior dari suatu himpunan S jika ada persekitaran dari z_0 yang hanya memuat titik-titik dari S , disebut titik eksterior dari S apabila ada persekitaran yang tidak memuat satupun titik dari S . Jika z_0 bukan keduanya. Maka titik tersebut disebut sebagai titik batas dari S . Oleh karena itu, titik batas adalah semua titik yang persekitarannya memuat setidaknya satu titik di S dan setidaknya satu titik yang bukan di S . Himpunan

semua titik batas disebut sebagai batas dari S . Sebagai contoh, lingkaran $|z| = 1$ merupakan batas dari masing-masing himpunan tersebut.

(3) $|z| < 1$ and $|z| \leq 1$

Suatu himpunan dikatakan terbuka jika tidak memuat satu pun titik batasnya. Ini dibiarkan sebagai latihan untuk menunjukkan bahwa suatu himpunan terbuka jika dan hanya jika setiap titiknya merupakan titik interior. Suatu himpunan dikatakan tertutup jika memuat semua titik batasnya, dan penutupan dari suatu himpunan S adalah himpunan tertutup yang terdiri dari semua titik di S beserta seluruh titik batas S . Perlu diperhatikan bahwa himpunan pertama pada (3) bersifat terbuka, sedangkan himpunan kedua merupakan tertutup.

Example:



Diketahui : $S = \{z | 0 < |z| \leq 1\}$

- Titik interior: $\{z | 0 < |z| < 1\}$
- Titik exterior: $\{z | |z| > 1\}$
- Titik batas: $\{z | |z| = 0 \wedge |z| = 1\}$
- Bukan himpunan terbuka, karena S mengandung batas yaitu $|z| = 1$
- Bukan himpunan tertutup, karena S tidak mengandung semua titik batas yaitu $z = 0$ tidak berada dalam S .

Beberapa himpunan tentu saja bukan merupakan himpunan terbuka atau tertutup. Agar suatu himpunan tidak terbuka, harus ada titik batas yang terdapat pada himpunan tersebut, dan jika suatu himpunan tidak tertutup, maka terdapat titik batas yang tidak termasuk di dalam himpunan tersebut. Amati bahwa

cakram yang tertusuk $0 < |z| \leq 1$ bukan himpunan terbuka maupun tertutup. Sebaliknya, himpunan semua bilangan kompleks bersifat terbuka dan tertutup karena tidak memiliki titik batas.

Suatu himpunan terbuka S dikatakan terhubung jika setiap pasangan titik z_1 dan z_2 di dalamnya dapat dihubungkan dengan sebuah garis poligonal, yang terdiri dari sejumlah hingga ruas-ruas garis yang tersambung ujung ke ujung, dan seluruhnya terletak di S . Himpunan terbuka $|z| < 1$ adalah terhubung. Anulus $1 < |z| < 2$ tentu saja, merupakan himpunan terbuka dan juga terhubung (lihat Gambar 16). Himpunan terbuka tak kosong yang terhubung disebut domain. Perhatikan bahwa setiap lingkungan adalah domain. Domain bersama dengan sebagian, tidak satupun, atau semua titik batasnya disebut sebagai Region (wilayah).

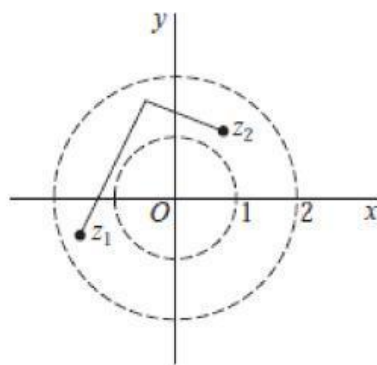


FIGURE 16

Suatu himpunan S dikatakan terbatas jika setiap titik di dalam S terletak di dalam suatu lingkaran $|z| = R$; jika tidak, maka himpunan tersebut disebut tak terbatas. Kedua himpunan pada (3) adalah daerah yang dibatasi dan setengah bidang $\operatorname{Re} z \geq 0$ merupakan himpunan tidak terbatas. Sebuah titik z_0 dikatakan sebagai titik akumulasi dari himpunan S jika setiap lingkungan yang dihapus dari z_0 memuat setidaknya satu titik dari S . Oleh karena itu, jika suatu himpunan S tertutup, maka himpunan tersebut memuat setiap titik akumulasinya.

Sebab jika suatu titik akumulasi z_0 tidak termasuk dari himpunan S maka, maka titik tersebut akan menjadi titik batas dari S . Hal ini bertentangan dengan fakta bahwa himpunan tertutup memuat semua titik batasnya. Dibiarkan sebagai

latihan untuk menunjukkan bahwa kebalikannya juga benar. Dengan demikian, suatu himpunan tertutup jika dan hanya jika himpunan tersebut memuat semua titik akumulasinya. Jelas bahwa suatu titik z_0 bukan merupakan titik akumulasi dari suatu himpunan S apabila terdapat suatu lingkungan terhapus dari z_0 yang tidak memuat satu pun titik dari S . Perhatikan bahwa titik asal merupakan satu-satunya titik akumulasi dari himpunan $z_n = \frac{i}{n}, (n = 1, 2, \dots)$.