

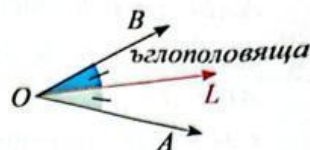
ЪГЛОПОЛОВЯЩА НА ЪГЪЛ.

ПОСТРОЯВАНЕ НА ЪГЛОПОЛОВЯЩА НА ДАДЕН ЪГЪЛ

Знаем, че по определение лъч, който разделя един ъгъл на два равни ъгъла, се нарича ъглополовяща на ъгъла.

Ако $OL^{\rightarrow}$ е ъглополовяща на $\angle AOB$, то $\angle AOL = \angle BOL = \frac{1}{2} \angle AOB$.

Сега ще докажем теорема – свойство и теорема – признак за точките от ъглополовящата на ъгъл.



Теорема – свойство

Всяка точка от ъглополовящата на даден ъгъл е на равни разстояния от раменете му.

Дадено:

$OL^{\rightarrow}$ – ъглополовяща на $\angle AOB$

$X \in OL^{\rightarrow}$, $XM \perp OA$ и $XN \perp OB$

Да се докаже:

$XM = XN$

Доказателство:

Разглеждаме $\triangle OMX$ и $\triangle ONX$.

1) OX – обща страна

2) $\angle MOX = \angle NOX$ (OL – ъглополовяща)

3) $\angle OMX = \angle ONX = 90^\circ$

$\Rightarrow \triangle OMX \cong \triangle ONX$ по втори признак.

Следователно $XM = XN$ като съответни страни в еднакви триъгълници.

Теорема – признак

Всяка точка от вътрешността на даден ъгъл, която е на равни разстояния от раменете му, лежи на ъглополовящата на този ъгъл.

Дадено:

$OL^{\rightarrow}$ – ъглополовяща на $\angle AOB$,

точка X – вътрешна на $\angle AOB$

$XM \perp OA$ и $XN \perp OB$

$XM = XN$

Да се докаже:

$X \in OL^{\rightarrow}$

Доказателство:

Разглеждаме $\triangle OMX$ и $\triangle ONX$ – правоъгълни

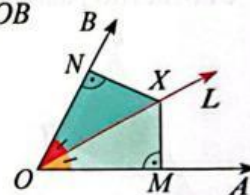
1) $XM = XN$ (по условие)

2) OX – обща страна

$\Rightarrow \triangle OMX \cong \triangle ONX$ по признака за еднаквост на правоъгълни триъгълници

$\Rightarrow \angle MOX = \angle NOX$ (съответни ъгли).

Следователно $X \in OL^{\rightarrow}$.



- 1 На чертежа точка L лежи на страната BC на остроъгълния $\triangle ABC$, а LM и LN са разстоянията от точка L съответно до страните AB и AC .

а) Ако AL е ъглополовяща на $\angle BAC$ и $LM = 7,7$ cm, намерете LN .

б) Ако $LM = LN$ и $\angle BAC = 70^\circ$, намерете мерките на $\angle MAL$ и $\angle ALN$.

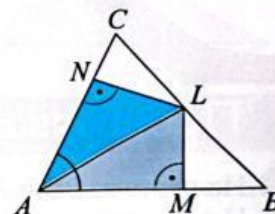
Решение:

а) От условието, че точка L е от ъглополовящата на $\angle BAC$ и LM и LN са разстоянията до раменете на ъгъла, следва, че $LM = LN = 7,7$ cm.

б) От това, че LM и LN са разстоянията от точка L до раменете на ъгъл $\angle BAC$ и $LM = LN$, следва, че AL е ъглополовяща на $\angle BAC$, т.е.

$$\angle MAL = \angle NAL = \frac{70^\circ}{2} = 35^\circ.$$

От $\triangle ALN$ – правоъгълен, следва, че $\angle ALN = 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$.



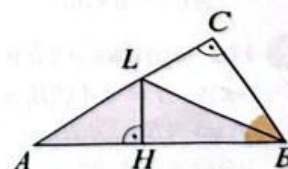
- 2 Даден е правоъгълен $\triangle ABC$ с ъглополовяща BL и хипотенуза $AB = 8$ cm. Ако $LC = 3,5$ cm, намерете лицето на $\triangle ABL$.

Решение:

Нека LH е разстоянието от точка L до страната AB .

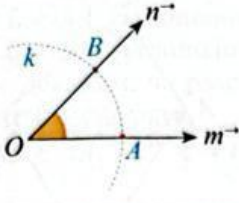
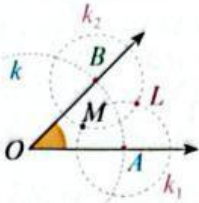
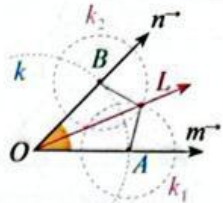
От това, че L лежи на ъглополовящата на $\angle ABC \Rightarrow LH = LC = 3,5$ cm.

$$S_{\triangle ABL} = \frac{AB \cdot LH}{2} = \frac{8 \cdot 3,5}{2} = 14 \text{ cm}^2$$



3 Даден е $\angle Omn$. Постройте с линейка и пергел ъглополовящата на $\angle Omn$.

Решение:

Първа стъпка:	Втора стъпка:	Трета стъпка:
		
Построяваме окръжност $k(O; r)$. $k \cap Om = A$ $k \cap On = B$	Построяваме окръжности $k_1(A; r_1)$ и $k_2(B; r_1)$, $r_1 < r$ $k_1 \cap k_2 = (L, M)$	Построяваме лъч OL. Ще докажем че лъчът OL е ъглополовяща на $\angle Omn$.

Разглеждаме $\triangle AOL$ и $\triangle BOL$.

- 1) $OA = OB = r$ – по построение
 2) $AL = BL = r_1$ – по построение
 3) OL – обща страна
- $\Rightarrow \triangle AOL \cong \triangle BOL$ по трети признак.
 $\Rightarrow \angle AOL = \angle BOL$ (съответни ъгли).

Следователно лъчът OL е ъглополовяща на $\angle Omn$.

Какво научих

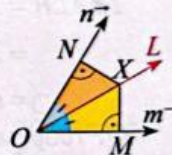
Знам теореми за ъглополовяща на ъгъл.

OL е ъглополовяща на $\angle Omn$ и точка X е от вътрешността на $\angle Omn$.

$XM \perp Om$ и $XN \perp On$

свойство: Ако $X \in OL$, то $XM = XN$.

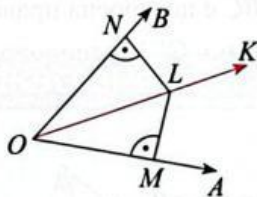
признак: Ако $XM = XN$, то $X \in OL$.



Мога да построявам с линия и пергел ъглополовяща на ъгъл.

Проверявам какво знам

- 4 На чертежа лъчът OK е вътрешен за $\angle AOB$. Точка $L \in OK$, а LM и LN са разстоянията от точка L съответно до OA и OB .



- а) Ако OK е ъглополовяща на $\angle AOB$ и $LM + LN = 12,6$ cm, намерете дължината на LN .
- б) Ако $LM = LN$ и $\angle AOB = 66^\circ$, намерете мярката $\angle AOK$.

- 5 В остроъгълния $\triangle ABC$ $\angle ACB = 50^\circ$. Ако CL е ъглополовяща на $\angle ACB$ и LM и LN са разстоянията от точка L съответно до страните AC и BC , намерете ъглите на $\triangle MLN$.

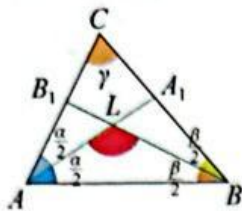
- 6 В правоъгълния $\triangle ABC$ ($\angle ACB = 90^\circ$) BL е ъглополовяща. Ако LH е разстоянието от точка L до страната AB и $CL = AH$, докажете, че:
- а) $\triangle AHL$ е равнобедрен;
 б) $\triangle ABC$ е равнобедрен.

- 7 Даден е $\triangle ABC$ с ъглополовяща CL ($L \in AB$). Разстоянието от точка L до страната BC е равно на 8 cm. Ако $CL = BL = 16$ cm, намерете:
- а) ъглите на $\triangle ABC$; б) дължината на страната AB .

УПРАЖНЕНИЕ. ЪГЛОПОЛОВЯЩА НА ЪГЪЛ

- 1 Разгледайте някои основни задачи за ъглополовящи в триъгълник и докажете твърденията в тях.

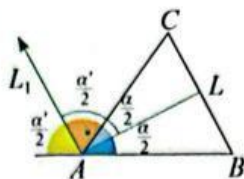
а)



Ако ъглополовящите AA_1 и BB_1 на $\triangle ABC$ се пресичат в точка L и $\angle ACB = \gamma$,

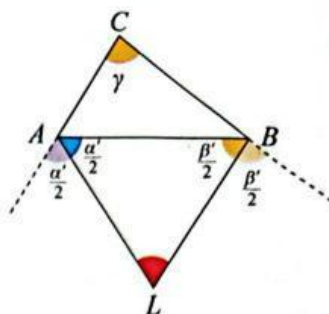
то $\angle ALB = 90^\circ + \frac{\gamma}{2}$.

б)



Ако AL и AL_1 са ъглополовящи съответно на вътрешния и външния ъгъл при върха A на $\triangle ABC$, то $\angle L_1AL = 90^\circ$.

в)



Ако AL и BL са ъглополовящи съответно на външните ъгли при върховете A и B на $\triangle ABC$ и $\angle ACB = \gamma$,

то $\angle ALB = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$.

Упътване:

в) От теорема за сбор на ъглите на $\triangle ABL$ следва, че

$$\angle ALB = 180^\circ - \frac{\alpha'}{2} - \frac{\beta'}{2} \quad | \cdot 2 \Leftrightarrow 2\angle ALB = 360^\circ - \alpha' - \beta'$$

Знаем, че $\alpha' = 180^\circ - \alpha$ (съседни ъгли) и

$\beta' = 180^\circ - \beta$ (съседни ъгли)

Тогава получаваме

$$\begin{aligned} 2\angle ALB &= 360^\circ - (180^\circ - \alpha) - (180^\circ - \beta) \\ &= 360^\circ - 180^\circ + \alpha - 180^\circ + \beta \\ &= \alpha + \beta. \end{aligned}$$

От теорема за сбор на ъглите на $\triangle ABC$ следва, че

$$\alpha + \beta = 180^\circ - \gamma.$$

$$\text{Следователно } 2\angle ALB = 180^\circ - \gamma \quad | : 2 \Leftrightarrow \angle ALB = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}.$$

- 2 На чертежа през върха C на равнобедрения $\triangle ABC$ е построена правата a , успоредна на основата му AB . Докажете, че лъчът CL е ъглополовяща на външния ъгъл BCM на $\triangle ABC$.

Решение:

Ще докажем, че $\angle BCL = \angle MCL$.

От това, че $\triangle ABC$ е равнобедрен ($AC = BC$) $\Rightarrow \angle A = \angle B = \alpha$.

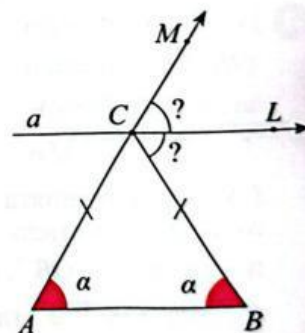
От това, че $\angle BCM$ е външен ъгъл за $\triangle ABC \Rightarrow \angle BCM = \angle A + \angle B = 2\alpha$.

От $(a \parallel AB) \cap BC \Rightarrow \angle BCL = \angle B = \alpha$ като кръстни ъгли.

$$\angle MCL = \angle BCM - \angle BCL = 2\alpha - \alpha = \alpha$$

Получихме, че $\angle BCL = \alpha = \angle MCL$.

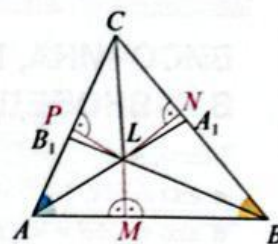
Следователно CL е ъглополовяща на $\angle BCM$.



- 3 Ъглополовящите AA_1 и BB_1 на $\triangle ABC$ се пресичат в точка L . Отсечките LM , LN и LP са разстоянията от точка L съответно до страните AB , BC и AC .
 а) Ако $LM = 2$ cm, намерете LP и LN .
 б) Докажете, че CL е ъглополовяща на $\angle ACB$.

Решение:

- а) От $L \in AA_1$ (ъглополовяща на $\angle BAC$) $\Rightarrow LP = LM = 2$ cm.
 От $L \in BB_1$ (ъглополовяща на $\angle ABC$) $\Rightarrow LN = LM = 2$ cm.
 б) Ще докажем, че разстоянията LN и LP от точка L до раменете на $\angle ACB$ са равни.
 От $L \in AA_1 \Rightarrow LM = LP$
 От $L \in BB_1 \Rightarrow LM = LN$ } $\Rightarrow LP = LN$, но това са разстояния до раменете на $\angle ACB$,
 следователно CL е ъглополовяща на $\angle ACB$.



Така доказахме, че трите ъглополовящи на вътрешните ъгли на един триъгълник се пресичат в една точка L , която се намира на равни разстояния от страните му ($LM = LP = LN$).

ПРАКТИЧЕСКО ПРАВИЛО

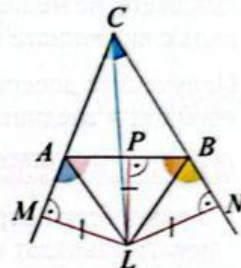
За да докажем, че вътрешен лъч е ъглополовяща на ъгъл, може да използваме един от начините:

- Доказваме, че лъчът разделя дадения ъгъл на два равни ъгъла.
- Доказваме, че точка от лъча се намира на равни разстояния от раменете на ъгъла.

- 4 На чертежа ъглополовящите на външните ъгли при върховете A и B на $\triangle ABC$ се пресичат в точка L . Докажете, че CL е ъглополовяща на $\angle ACB$.
Доказателство:

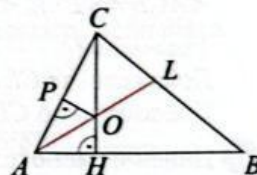
Построяваме разстоянията LM , LP и LN от точка L съответно до правите AC , AB и BC .

От AL – ъглополовяща на $\angle MAB \Rightarrow LM = LP$
 От BL – ъглополовяща на $\angle ABN \Rightarrow LN = LP$ } $\Rightarrow LM = LN$, но това
 са разстояния до раменете на $\angle MCN$, следователно CL е ъглополовяща
 на $\angle ACB$.



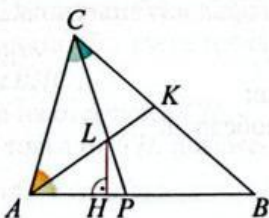
- 5 На чертежа $\triangle ABC$ е остроъгълен. Височината CH и ъглополовящата AL се пресичат в точка O и OP е разстоянието от точка O до страната AC . Кое от следните твърдения НЕВИНАГИ е вярно?

- А) $OH = OP$ Б) $\triangle AOH \cong \triangle AOP$
 В) $OP = OL$ Г) OA е ъглополовяща на $\angle HOP$.



Проверявам какво знам

- 6 На чертежа ъглополовящите AK и CP на $\triangle ABC$ се пресичат в точка L , а $LH = 2,2$ cm е разстоянието от точка L до страната AB . Ако $CL = 4,4$ cm, намерете мярката на $\angle ACB$.
 7 В остроъгълния $\triangle ABC$ точка M е средата на страната AB . Ако MH и MD са разстоянията



от точка M съответно до страните AC и BC и $MH = MD$, докажете, че:

- а) $\triangle AMH \cong \triangle BMD$; б) $\triangle ABC$ е равнобедрен.

- 8 Ако ъглополовящата на външния ъгъл при върха A на $\triangle ABC$ е успоредна на страната BC , докажете, че $\triangle ABC$ е равнобедрен с основа BC .
 9 Даден е $\triangle ABC$ с ъглополовяща AL . През точка L е построена права, успоредна на AB , която пресича страната AC в точка M . Докажете, че $\triangle ALM$ е равнобедрен.