CĐ 2 VECTƠ VÀ HỆ TRỤC TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

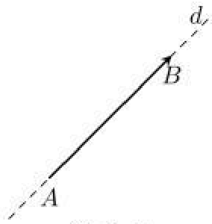
I Kiến thức cơ bản

1 Véc-tơ trong không gian

Định nghĩa 2.1. Véc-tơ trong không gian là một đoạn thẳng có hướng.

Tương tự như véc-tơ trong mặt phẳng, đối với véc-tơ trong không gian, ta cũng có các kí hiệu và khái niệm sau:

- Với véc-tơ $\overrightarrow{AB}$, ta có
  - Điểm A là điểm đầu, điểm B là điểm cuối.
  - Hướng của véc-tơ $\overrightarrow{AB}$: Từ A đến B.
  - Đường thẳng d đi qua hai điểm A và B gọi là giá của véc-tơ $\overrightarrow{AB}$.
  - Độ dài của véc-tơ $\overrightarrow{AB}$, kí hiệu $\left|\overrightarrow{AB}\right|$, là độ dài của đoạn thẳng AB.



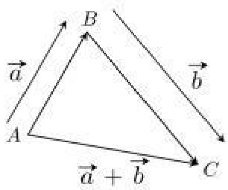
Hình 1

- Khi không cần chỉ rõ điểm đầu và điểm cuối của véc-tơ thì véc-tơ còn được kí hiệu là $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{x}$, $\vec{y}$,...
- Hai véc-tơ được gọi là cùng phương nếu chúng có giá song song hoặc trùng nhau.
- Nếu hai véc-tơ cùng phương thì chúng cùng hướng hoặc ngược hướng.
- Hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là bằng nhau, kí hiệu $\vec{a} = \vec{b}$, nếu chúng cùng hướng và cùng độ dài.

2 Các phép toán véc-tơ trong không gian

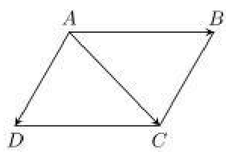
a) **Tổng của hai véc-tơ**

Trong không gian, cho hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.
Lấy điểm A bất kì.
Dựng các véc-tơ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \vec{B}, \overrightarrow{BC} = \vec{b}$.
Khi đó, véc-tơ $\overrightarrow{AC}$ được gọi là tổng của hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$.

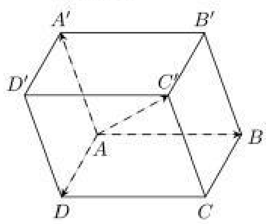


Hình 2

- *Quy tắc cộng*: Với ba điểm A, B, C bất kì, ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.
- *Quy tắc hình bình hành*: Cho hình bình hành $ABCD$, ta có $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.
- *Quy tắc hình hộp*: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, ta có $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$.



Hình 3



Hình 4

b) **Hiệu của hai véc-tơ**

Véc-tơ có cùng độ dài và ngược hướng với véc-tơ $\vec{a}$ được gọi là véc-tơ đối của véc-tơ $\vec{a}$, kí hiệu là $-\vec{a}$.
Véc-tơ $\overrightarrow{BA}$ là một véc-tơ đối của véc-tơ $\overrightarrow{AB}$, được viết là $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.
Véc-tơ $\vec{a} + (-\vec{b})$ được gọi là hiệu của hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu $\vec{a} - \vec{b}$.

- *Quy tắc trừ:* Với ba điểm A, B, O bất kì, ta có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$.

c) **Tích của một số với một véc-tơ**

Trong không gian, cho số thực $k \neq 0$ và véc-tơ $\vec{a} \neq \vec{0}$. Tích của số k với véc-tơ $\vec{a}$ là một véc-tơ, kí hiệu là $k\vec{a}$, được xác định như sau

- Cùng hướng với véc-tơ $\vec{a}$ nếu $k > 0$; ngược hướng với véc-tơ $\vec{a}$ nếu $k < 0$;
- Có độ dài bằng $|k| \cdot |\vec{a}|$.

Phép lấy tích của một số với một véc-tơ được gọi là phép nhân một số với một véc-tơ.

Quy ước: $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$ *và* $k \cdot \vec{0} = \vec{0}$.

Nhận xét.

- Điều kiện cần và đủ để hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ($\vec{b} \neq \vec{0}$) cùng phương là tồn tại số thực k sao cho $\vec{a} = k\vec{b}$.
- Điều kiện cần để ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng là tồn tại số thực k sao cho $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$.

Tính chất 2.1. *Với hai véc-tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ bất kì và hai số x, y, ta có*

$$x(y\vec{a}) = (xy)\vec{a}; \quad (x+y)\vec{a} = x\vec{a} + y\vec{a}; \quad x(\vec{a} + \vec{b}) = x\vec{a} + x\vec{b}.$$

d) **Tích vô hướng của hai véc-tơ**

Góc giữa hai véc-tơ

Trong không gian, cho hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác $\vec{0}$. Lấy một điểm A bất kì, gọi B và C là hai điểm sao cho $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$. Khi đó, ta gọi $\widehat{BAC}$ là góc giữa hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu là $(\vec{a}, \vec{b})$.

Tích vô hướng của hai véc-tơ

Trong không gian, cho hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác $\vec{0}$. Tích vô hướng của $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số, kí hiệu là $\vec{a} \cdot \vec{b}$, được xác định bởi công thức $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$.

- *Quy ước: Nếu $\vec{a} = \vec{0}$ hoặc $\vec{b} = \vec{0}$ thì $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.*
- *Với hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác $\vec{0}$, ta có $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.*
- *Với hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác $\vec{0}$, ta có $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$.*

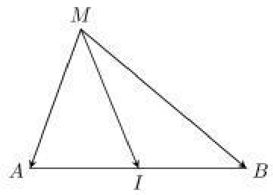
Tính chất 2.2. *Với ba véc-tơ bất kì $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ và số thực k, ta có*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}; \quad \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}; \quad (k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (k\vec{b}).$$

e) **Một số kiến thức bổ sung**

Quy tắc trung điểm

Với I là trung điểm của AB, khi đó



- $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.
- Với mọi điểm M thì $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$.

Quy tắc trọng tâm của tam giác

Với G là trọng tâm của tam giác ABC, khi đó

- $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.
- Với mọi điểm M thì $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.

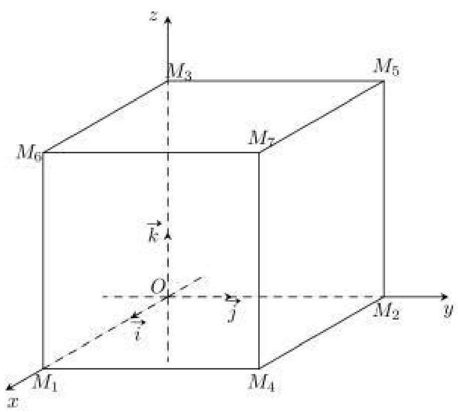
Quy tắc trọng tâm của tứ diện

Với G là trọng tâm của tứ diện $ABCD$, khi đó

- $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.
- Với mọi điểm M thì $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MG}$.

3 Hệ trục tọa độ trong không gian

ĐỊNH NGHĨA 2.2. Trong không gian, hệ gồm ba trục Ox, Oy, Oz đôi một vuông góc với nhau và các véc-tơ đơn vị $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ lần lượt trên các trục Ox, Oy, Oz được gọi là hệ trục tọa độ Descartes vuông góc $Oxyz$ hay đơn giản là hệ tọa độ $Oxyz$.



- Điểm O được gọi là gốc tọa độ.
- Các trục Ox, Oy, Oz được gọi là các trục tọa độ.
- Các mặt phẳng (Oxy), (Oyz), (Oxz) được gọi là các mặt phẳng tọa độ.
- Không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ còn được gọi là không gian $Oxyz$.

Tọa độ của điểm, tọa độ của véc-tơ trong không gian

Trong không gian $Oxyz$, cho một điểm M tùy ý.

Bộ ba số $(x; y; z)$ duy nhất sao cho $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ được gọi là tọa độ của điểm M đối với hệ tọa độ $Oxyz$.

Khi đó, ta viết $M = (x; y; z)$ hoặc $M(x; y; z)$ trong đó x, y, z tương ứng là hoành độ, tung độ và cao độ của điểm M.

Trong không gian $Oxyz$, cho véc-tơ $\vec{a}$ tùy ý. Bộ ba số $(x; y; z)$ duy nhất sao cho $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ được gọi là tọa độ của véc-tơ $\vec{a}$ đối với hệ tọa độ $Oxyz$. Khi đó, ta viết $\vec{a} = (x; y; z)$ hoặc $\vec{a}(x; y; z)$, trong đó x, y, z tương ứng là hoành độ, tung độ và cao độ của véc-tơ $\vec{a}$.

Biểu thức tọa độ của các phép toán véc-tơ

Trong không gian $Oxyz$, cho hai véc-tơ $\vec{u} = (x; y; z)$, $\vec{v} = (x'; y'; z')$. Khi đó

- $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \\ z = z'; \end{cases}$

- $\vec{u} + \vec{v} = (x + x'; y + y'; z + z')$;
- $\vec{u} - \vec{v} = (x - x'; y - y'; z - z')$;
- $k\vec{u} = (kx; ky; kz)$, với k là một số thực;
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$;
- $|\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$;
- $[\vec{u}, \vec{v}] = \left(\begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} z & x \\ z' & x' \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} \right)$;
- $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \dfrac{xx' + yy' + zz'}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}$.

Ứng dụng của tọa độ véc-tơ

Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$, $C(x_C; y_C; z_C)$. Khi đó

- $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$; $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$;
- Nếu $M(x_M; y_M; z_M)$ là trung điểm của đoạn thẳng AB thì

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}; \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}; \quad z_M = \frac{z_A + z_B}{2}.$$

Giả sử ba điểm A, B, C không thẳng hàng. Nếu $G(x_G; y_G; z_G)$ là trọng tâm của tam giác ABC thì

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \quad y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \quad z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}.$$