CĐ 1 ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

I Tóm tắt lý thuyết

1 Đạo hàm

a) Định nghĩa
Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ và điểm x_0 thuộc khoảng đó.
Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

thì giới hạn đó được gọi là *đạo hàm của hàm số* $y = f(x)$ tại điểm x_0, kí hiệu bởi $f'(x_0)$ hoặc y'_{x_0}.

b) Ý nghĩa vật lí của đạo hàm
Dạo hàm xuất hiện trong nhiều khái niệm vật lí. Chẳng hạn: Xét chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s = s(t)$, với $s = s(t)$ là một hàm số có đạo hàm. Vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm t_0 là đạo hàm của hàm số $s = s(t)$ tại t_0: $v(t_0) = s'(t_0)$.

c) Ý nghĩa hình học của đạo hàm

- Đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 là hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số đó tại điểm $M(x_0; f(x_0))$.
- Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $M(x_0; f(x_0))$ là

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

d) Đạo hàm của hàm hợp
Nếu hàm số $u = g(x)$ có đạo hàm tại x là u'_x và hàm số $y = f(u)$ có đạo hàm tại u là y'_u thì hàm hợp $y = f(g(x))$ có đạo hàm tại x là $y'_x = y'_u \cdot u'_x$.

e) Đạo hàm của một số hàm số thường gặp

Đạo hàm của hàm số sơ cấp cơ bản thường gặp	Đạo hàm của hàm hợp (ở đây $u = u(x)$)
$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$	$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$
$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = u' \cdot \cos u$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$
$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$
$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin x}$	$(\cot u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$
$(e^x)' = e^x$	$(e')' = u' \cdot e'$
$(a^x)' = a^x \ln a$	$u' \cdot a^u \ln a$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$

LIVEWORKSHEETS

f) Đạo hàm của tổng, hiệu, tích, thương
Giả sử $f = f(x)$, $g = g(x)$ là các hàm số có đạo hàm tại điểm x thuộc khoảng xác định.
Ta có:

- $(f+g)' = f' + g'$.
- $(f-g)' = f' - g'$.
- $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$.
- $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$, $(g = g(x) \neq 0)$.

HỆ QUẢ 1.1. *Cho $f = f(x)$ là hàm số có đạo hàm tại điểm x thuộc khoảng xác định.*

- *Nếu c là một hằng số thì $(cf)' = cf'$.*
- $\left(\dfrac{1}{f}\right)' = -\dfrac{f'}{f^2}$, $(f = f(x) \neq 0)$.

2 Tính đơn điệu của hàm số

a) Định lí
Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên tập $K \subset \mathbb{R}$, trong đó K là một khoảng, đoạn hoặc nửa khoảng. Nếu $f'(x) \geq 0$ (hoặc $f'(x) \leq 0$) với mọi x thuộc K và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm của K thì hàm số $f(x)$ đồng biến (hoặc nghịch biến) trên K.

b) Các bước để tìm khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số $f(x)$.

- **Bước 1.** Tìm tập xác định của hàm số $y = f(x)$.
- **Bước 2.** Tính đạo hàm $f'(x)$. Tìm các điểm x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ mà tại đó hàm số có đạo hàm bằng 0 hoặc không tồn tại.
- **Bước 3.** Sắp xếp các điểm x_i theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên.
- **Bước 4.** Căn cứ vào bảng biến thiên, nêu kết luận về các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số.

Ta cũng có thể nhận biết tính đơn điệu của hàm số bằng cách quan sát hình dáng của đồ thị đi lên (hàm số đồng biến) hoặc đi xuống (hàm số nghịch biến).

3 Điểm cực trị, giá trị cực trị của hàm số

a) Dấu hiệu nhận biết cực trị của hàm số bằng đạo hàm
Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $(a; b)$ chứa điểm x_0 và có đạo hàm trên các khoảng $(a; x_0)$ và $(x_0; b)$. Khi đó

- Nếu $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (a; x_0)$ và $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (x_0; b)$ thì x_0 là một điểm cực tiểu của hàm số $f(x)$.
- Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (a; x_0)$ và $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (x_0; b)$ thì x_0 là một điểm cực đại của hàm số $f(x)$.

b) Các bước để tìm điểm cực trị của hàm số $f(x)$

- **Bước 1.** Tìm tập xác định của hàm số $f(x)$.
- **Bước 2.** Tính đạo hàm $f'(x)$. Tìm các điểm x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ mà tại đó đạo hàm $f'(x)$ bằng 0 hoặc đạo hàm không tồn tại.
- **Bước 3.** Sắp xếp các điểm x_i theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên.
- **Bước 4.** Căn cứ vào bảng biên thiên, nêu kết luận về các điểm cực trị của hàm số.

LIVEWORKSHEETS

4 Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

a) Định nghĩa
Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập $\mathscr{D}$.

- Số M được gọi là giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên tập $\mathscr{D}$, kí hiệu $M = \max\limits_{\mathscr{D}} f(x)$, nếu $f(x) \le M$ với mọi $x \in \mathscr{D}$ và tồn tại $x_0 \in \mathscr{D}$ sao cho $f(x_0) = M$.
- Số m được gọi là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên tập $\mathscr{D}$, kí hiệu $m = \min\limits_{\mathscr{D}} f(x)$, nếu $f(x) \ge m$ với mọi $x \in \mathscr{D}$ và tồn tại $x_1 \in \mathscr{D}$ sao cho $f(x_1) = m$.

b) Cách tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng đạo hàm
Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$, có thể trừ một số hữu hạn điểm. Nếu $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm thuộc khoảng $(a;b)$ thì ta có quy tắc tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$ như sau:

- **Bước 1.** Tìm những điểm $x_1, x_2, \ldots, x_i$ thuộc khoảng $(a;b)$ mà tại đó có đạo hàm bằng 0 hoặc không tồn tại.
- **Bước 2.** Tính $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_i)$, $f(a)$ và $f(b)$.
- **Bước 3.** So sánh các giá trị tìm được ở Bước 2.
  Số lớn nhất trong các giá trị đó là giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$, số nhỏ nhất trong các giá trị đó là giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$.

5 Đường tiệm cận của đồ thị hàm số

a) Đường tiệm cận ngang
Đường thẳng $y = y_0$ gọi là đường tiệm cận ngang (gọi tắt là tiệm cận ngang) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = y_0 \text{ hoặc } \lim_{x\to-\infty} f(x) = y_0.$$

b) Đường tiệm cận đứng
Đường thẳng $x = x_0$ gọi là đường tiệm cận đứng (gọi tắt là tiệm cận đứng) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thoả mãn:

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty.$$

c) Đường tiệm cận xiên
Đường thẳng $y = ax + b$, $(a \ne 0)$ được gọi là đường tiệm cận xiên (gọi tắt là tiệm cận xiên) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu:

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0 \text{ hoặc } \lim_{x\to-\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0.$$

LIVEWORKSHEETS