


**CD 5**

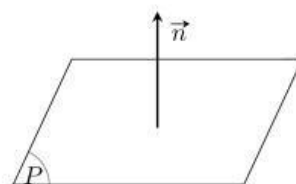
# PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG, ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT CẦU

## I Kiến thức cơ bản

### 1 Phương trình mặt phẳng

#### a. Véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng

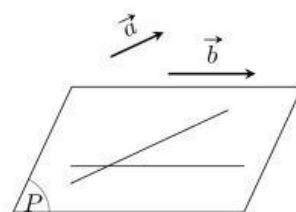
Cho mặt phẳng  $(P)$ . Nếu véc-tơ  $\vec{n}$  khác  $\vec{0}$  và có giá vuông góc với  $(P)$  thì  $\vec{n}$  được gọi là véc-tơ pháp tuyến của  $(P)$ .



Hình 1

#### b. Cặp véc-tơ chỉ phương của mặt phẳng

Cho mặt phẳng  $(P)$ . Nếu hai véc-tơ  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  không cùng phương, có giá song song hoặc nằm trong  $(P)$  thì  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  được gọi là cặp véc-tơ chỉ phương của  $(P)$ .



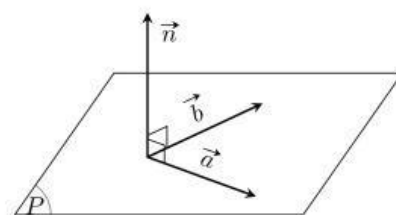
Hình 2

#### c. Xác định véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng khi biết một cặp véc-tơ chỉ phương

Trong không gian  $Oxyz$ , nếu mặt phẳng  $(P)$  nhận hai véc-tơ  $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ ,  $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$  làm cặp véc-tơ chỉ phương thì  $(P)$  nhận véc-tơ

$$\vec{n} = \left( \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$

làm véc-tơ pháp tuyến.



Hình 3

Véc-tơ  $\vec{n}$  xác định như trên chính là tích có hướng (hay tích véc-tơ) của hai véc-tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ .  
Kí hiệu  $\vec{n} = [\vec{a}, \vec{b}]$  hoặc  $\vec{n} = \vec{a} \wedge \vec{b}$ .

#### d. Khái niệm phương trình tổng quát của mặt phẳng

Trong không gian  $Oxyz$ , mỗi mặt phẳng đều có phương trình dạng  $Ax + By + Cz + D = 0$ , trong đó  $A, B, C$  không đồng thời bằng 0, được gọi là phương trình tổng quát của mặt phẳng.

#### ⚡ NHẬN XÉT.

- a) Mỗi phương trình  $Ax + By + Cz + D = 0$  (trong đó  $A, B, C$  không đồng thời bằng 0) đều xác định một mặt phẳng nhận  $\vec{n} = (A; B; C)$  làm véc-tơ pháp tuyến.



b) Cho mặt phẳng  $(P)$  có phương trình tổng quát là  $Ax + By + Cz + D = 0$ . Khi đó

$$M_0(x_0; y_0; z_0) \in (P) \Leftrightarrow Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0.$$

### e. Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua một điểm và biết véc-tơ pháp tuyến

Trong không gian  $Oxyz$ , phương trình mặt phẳng đi qua điểm  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  và có véc-tơ pháp tuyến  $\vec{n} = (A; B; C)$  là

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

hay  $Ax + By + Cz + D = 0$  với  $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$ .

### f. Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua một điểm và biết cặp véc-tơ chỉ phương

Để lập phương trình tổng quát của mặt phẳng  $(P)$  đi qua điểm  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  và có cặp véc-tơ chỉ phương  $\vec{a}, \vec{b}$ , ta thực hiện như sau:

- ☑ Tìm một véc-tơ pháp tuyến  $\vec{n} = [\vec{a}, \vec{b}]$ .
- ☑ Viết phương trình  $(P)$  đi qua điểm  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  và có véc-tơ pháp tuyến  $\vec{n}$ .

### g. Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng

Để lập phương trình tổng quát của mặt phẳng  $(P)$  đi qua ba điểm  $A, B, C$  không thẳng hàng, ta thực hiện như sau:

- ☑ Tìm cặp véc-tơ chỉ phương, chẳng hạn  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ .
- ☑ Tìm một véc-tơ pháp tuyến  $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]$ .
- ☑ Viết phương trình  $(P)$  đi qua điểm  $A$  và có véc-tơ pháp tuyến  $\vec{n}$ .

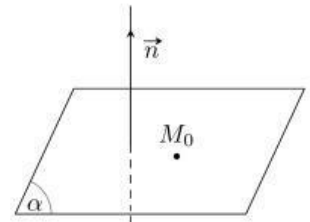
**⚡ NHẬN XÉT.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(a; 0; 0)$ ,  $B(0; b; 0)$ ,  $C(0; 0; c)$  với  $a, b, c$  đều khác 0. Khi đó, mặt phẳng  $(P)$  đi qua ba điểm  $A, B, C$  có phương trình là  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ . Phương trình này được gọi là *phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn*.

### h. Điều kiện để hai mặt phẳng song song

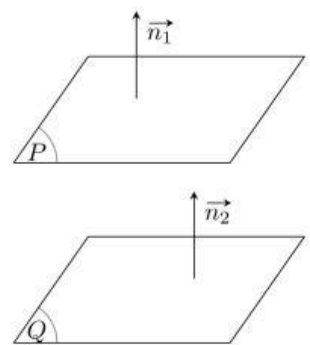
Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai mặt phẳng

$(P): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$  và  $(Q): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$   
có véc-tơ pháp tuyến lần lượt là  $\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$ ,  $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$ .  
Khi đó:

- ☑  $(P) \parallel (Q) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n}_1 = k\vec{n}_2 \\ D_1 \neq kD_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (A_1; B_1; C_1) = k(A_2; B_2; C_2) \\ D_1 \neq kD_2 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R}).$
- ☑  $(P) \equiv (Q) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n}_1 = k\vec{n}_2 \\ D_1 = kD_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (A_1; B_1; C_1) = k(A_2; B_2; C_2) \\ D_1 = kD_2 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R}).$



Hình 4



Hình 5



## i. Điều kiện để hai mặt phẳng vuông góc

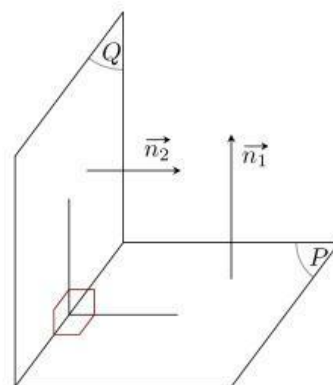
Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai mặt phẳng

$(P): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$  và  $(Q): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$   
có véc-tơ pháp tuyến lần lượt là  $\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$ ,  $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$ .

Khi đó:

$$\textcircled{v} (P) \perp (Q) \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

$$\textcircled{v} (P), (Q) \text{ cắt nhau} \Leftrightarrow (A_1; B_1; C_1) \neq k(A_2; B_2; C_2).$$



Hình 6

## j. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

Trong không gian  $Oxyz$ , cho điểm  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  và mặt phẳng  $(P): Ax + By + Cz + D = 0$ .  
Khoảng cách từ điểm  $M_0$  đến mặt phẳng  $(P)$  được tính theo công thức

$$d(M_0, (P)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

## 2 Phương trình đường thẳng trong không gian

### a. Véc-tơ chỉ phương của đường thẳng

Véc-tơ  $\vec{a}$  khác  $\vec{0}$  có giá song song hoặc trùng với đường thẳng  $d$  được gọi là *véc-tơ chỉ phương* của  $d$ .

### b. Phương trình tham số của đường thẳng

Trong không gian  $Oxyz$ , phương trình tham số của đường thẳng  $d$  đi qua điểm  $M(x_0; y_0; z_0)$  và nhận  $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$  làm véc-tơ chỉ phương có dạng

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1t \\ y = y_0 + a_2t \\ z = z_0 + a_3t \end{cases} \text{ với } t \in \mathbb{R} \text{ (} t \text{ được gọi là tham số).}$$



Trong không gian  $Oxyz$ , cho đường thẳng  $d: \begin{cases} x = x_0 + a_1t \\ y = y_0 + a_2t \\ z = z_0 + a_3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ , mỗi giá trị của tham số  $t$  xác định duy nhất một điểm  $M$  trên  $d$  và ngược lại.

### c. Phương trình chính tắc của đường thẳng

Trong không gian  $Oxyz$ , cho đường thẳng  $d$  đi qua điểm  $M(x_0; y_0; z_0)$  và có véc-tơ chỉ phương  $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ . Nếu  $a_1, a_2, a_3$  đều khác 0 thì hệ phương trình

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}$$

gọi là *phương trình chính tắc* của đường thẳng  $d$ .

**d. Viết phương trình tham số, phương trình chính tắc của đường thẳng đi qua hai điểm**

Trong không gian  $Oxyz$ , đường thẳng  $d$  đi qua hai điểm phân biệt  $A(x_A; y_A; z_A)$ ,  $B(x_B; y_B; z_B)$  có véc-tơ chỉ phương là  $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$  và có phương trình tham số

$$\begin{cases} x = x_A + (x_B - x_A)t \\ y = y_A + (y_B - y_A)t \\ z = z_A + (z_B - z_A)t. \end{cases}$$

Nếu  $x_A \neq x_B$ ,  $y_A \neq y_B$ ,  $z_A \neq z_B$  thì  $d$  có phương trình chính tắc

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{z - z_A}{z_B - z_A}.$$

**e. Điều kiện để hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau**

Gọi  $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ ,  $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$  lần lượt là vectơ chỉ phương của hai đường thẳng  $d$ ,  $\Delta$  và  $M(x_0; y_0; z_0)$  là một điểm trên  $d$ .

Ta có

$$\textcircled{v} \quad d \parallel \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a} = k\vec{b}, \quad k \in \mathbb{R} \\ M \notin \Delta. \end{cases}$$

$$\textcircled{v} \quad d \equiv \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a} = k\vec{b}, \quad k \in \mathbb{R} \\ M \in \Delta. \end{cases}$$

**f. Điều kiện để hai đường thẳng cắt nhau hoặc chéo nhau**

Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai đường thẳng

$$d: \begin{cases} x = x_0 + a_1t \\ y = y_0 + a_2t \\ z = z_0 + a_3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \text{ và } \Delta: \begin{cases} x = x'_0 + b_1t' \\ y = y'_0 + b_2t' \\ z = z'_0 + b_3t' \end{cases} \quad (t' \in \mathbb{R}).$$

Gọi  $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$  và  $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$  lần lượt là véc-tơ chỉ phương của  $d$  và  $\Delta$ .

Xét hệ phương trình ẩn  $t$  và  $t'$  là 
$$\begin{cases} x_0 + a_1t = x'_0 + b_1t' \\ y_0 + a_2t = y'_0 + b_2t' \\ z_0 + a_3t = z'_0 + b_3t'. \end{cases}$$

Ta có

$\textcircled{v} \quad d$  và  $\Delta$  cắt nhau khi và chỉ khi hệ trên có đúng một nghiệm.

$\textcircled{v} \quad d$  và  $\Delta$  chéo nhau khi và chỉ khi  $\vec{a}, \vec{b}$  không cùng phương và hệ trên vô nghiệm.

**g. Điều kiện để hai đường thẳng vuông góc**

Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai đường thẳng  $d$  và  $\Delta$  có véc-tơ chỉ phương lần lượt là  $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$  và  $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ .

Ta có  $d \perp \Delta \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$ .



### h. Góc giữa hai đường thẳng

Góc giữa hai đường thẳng  $d$  và  $\Delta$  có véc-tơ chỉ phương lần lượt là  $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$  và  $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$  được tính bởi công thức

$$\cos(d, \Delta) = |\cos(\vec{a}, \vec{b})| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{|a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

### i. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Góc giữa đường thẳng  $d$  có véc-tơ chỉ phương là  $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$  và mặt phẳng  $(P)$  có véc-tơ pháp tuyến  $\vec{n} = (n_1; n_2; n_3)$  được tính bởi công thức

$$\sin(d, (P)) = |\cos(\vec{a}, \vec{n})| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{n}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|a_1n_1 + a_2n_2 + a_3n_3|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}}$$

### j. Góc giữa hai mặt phẳng

Góc giữa hai mặt phẳng  $(P)$  và  $(Q)$  có véc-tơ pháp tuyến lần lượt là  $\vec{m} = (m_1; m_2; m_3)$  và  $\vec{n} = (n_1; n_2; n_3)$  được tính bởi công thức

$$\cos((P), (Q)) = |\cos(\vec{m}, \vec{n})| = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|m_1n_1 + m_2n_2 + m_3n_3|}{\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2} \cdot \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}}$$

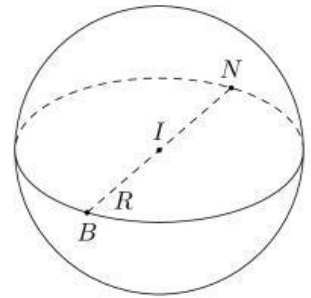
## 3 Phương trình mặt cầu

### a. Khái niệm mặt cầu

Trong không gian, cho điểm  $I$  và số dương  $R$ . Mặt cầu tâm  $I$ , bán kính  $R$ , kí hiệu  $S(I; R)$ , là tập hợp các điểm  $M$  trong không gian thoả mãn  $IM = R$ . Đoạn thẳng nối hai điểm thuộc mặt cầu và đi qua tâm  $I$  gọi là đường kính của mặt cầu.

**!** Cho mặt cầu  $S(I; R)$ .

- ☑ Nếu  $IM = R$  thì  $M$  nằm trên mặt cầu.
- ☑ Nếu  $IM < R$  thì  $M$  nằm trong mặt cầu.
- ☑ Nếu  $IM > R$  thì  $M$  nằm ngoài mặt cầu.



### b. Phương trình của mặt cầu

Trong không gian  $Oxyz$ , mặt cầu  $(S)$  tâm  $I(a; b; c)$ , bán kính  $R$  có phương trình là

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2.$$

**⚡ NHẬN XÉT.** Phương trình  $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$  với  $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$  là phương trình của mặt cầu tâm  $I(a; b; c)$ , bán kính  $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$ .