

# MODUL AJAR

# MATEMATIKA

Transformasi Geometri

Untuk SMA/MA  
Kelas 11





## 1 A. PENDAHULUAN

Transformasi geometri adalah cara memindahkan suatu objek (titik, garis, bangun datar) ke posisi lain dengan aturan tertentu tanpa mengubah bentuk dan ukurannya (kecuali pada dilatasi). Modul ini memuat konsep dasar, contoh soal, serta panduan praktikum menggunakan GeoGebra agar siswa dapat memahami transformasi secara visual.

## B. TUJUAN PEMBELAJARAN

Setelah mempelajari modul ini, siswa diharapkan mampu:

- Menjelaskan pengertian dan jenis-jenis transformasi geometri.
- Menentukan hasil translasi, refleksi, rotasi, dan dilatasi dari suatu titik atau bangun datar.
- Menggunakan rumus transformasi dengan tepat.
- Menerapkan transformasi geometri melalui media GeoGebra.
- Menginterpretasikan perubahan posisi objek setelah dilakukan transformasi.
- Menggunakan GeoGebra untuk melakukan visualisasi transformasi secara mandiri.



# PENGERTIAN TRANSFORMASI GEOMETRI

Transformasi berarti perubahan dan geometri berkaitan dengan suatu bangun, garis, titik, dan pengukurannya. Transformasi geometri adalah perubahan posisi dan ukuran suatu benda atau objek pada bidang geometri seperti garis, titik, maupun kurva.

Contoh transformasi geometri dalam kehidupan sehari-hari adalah saat kamu bercermin dan bayanganmu terlihat jelas pada cermin tersebut.

# 1. TRANSLASI

1 Translasi adalah perpindahan posisi suatu objek. Jika dinyatakan dalam koordinat Cartesius, translasi merupakan perpindahan titik-titik koordinat suatu objek ke arah dan jarak tertentu. Pada peristiwa translasi ini, ukuran objek tidak mengalami perubahan.

- Persamaan Umum Translasi

Jika titik  $P$  yang memiliki koordinat  $(x, y)$  ditranslasikan sejauh  $(a, b)$ , akan dihasilkan titik  $P'$  dengan koordinat  $(x', y')$ . Secara matematis, koordinat akhir pada proses translasi dinyatakan sebagai berikut.

$$P(x, y) \xrightarrow{T\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}} P'((x+a), (y+b))$$

Dengan :

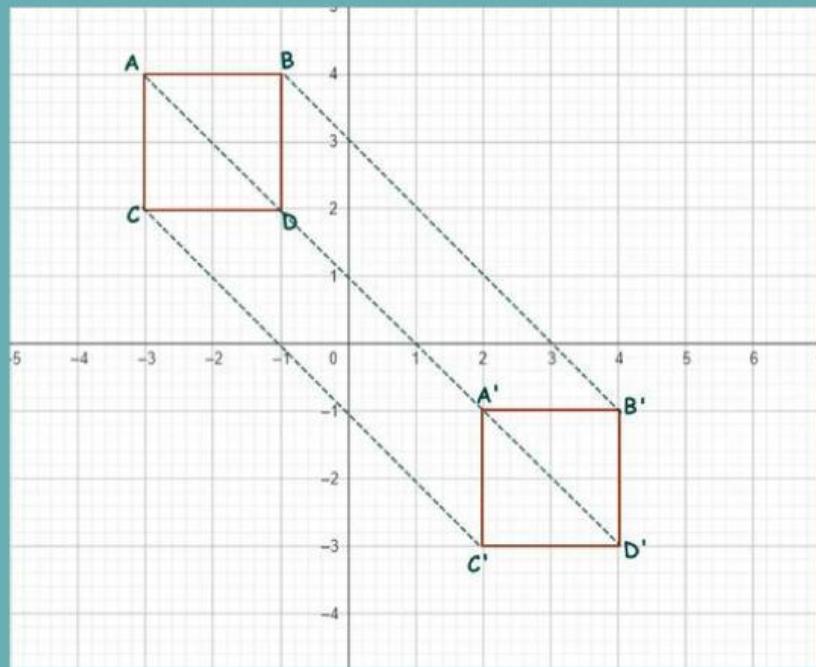
$P(x, y)$  = koordinat titik awalnya

$a$  = pergeseran pada sumbu-x

$b$  = pergeseran pada sumbu-y

$P((x+a), (y+b))$  = koordinat akhir setelah pergeseran

## CONTOH



Gambar di atas menunjukkan bahwa suatu bangun persegi ABCD mengalami translasi atau pergeseran hingga berada di posisi persegi A'B'C'D'.

Lalu, berapakah pergeseran atau perpindahan bangunnya?



%

X

÷

X

≠



## 2. REFLEKSI

1

Refleksi atau pencerminan adalah perpindahan titik suatu objek pada bidang sesuai dengan sifat pembentukan bayangan pada cermin datar. Pada prinsipnya, refleksi hampir sama dengan translasi, yaitu pergeseran. Hanya saja, pada refleksi memiliki sifat-sifat tertentu sedemikian sehingga posisi akhir objeknya merupakan hasil pencerminan objek awalnya.

- **Sifat-Sifat Refleksi**

1. Jarak antara titik awal objek ke cermin sama dengan jarak titik akhir objek ke cermin.
2. Garis penghubung antara objek awal dan akhirnya selalu tegak lurus cermin. Jika dicerminkan terhadap sumbu-x, maka garis penghubungnya tegak lurus terhadap sumbu-x. Jika dicerminkan terhadap sumbu-y, garis penghubungnya juga tegak lurus terhadap sumbu-y.
3. Sumbu-x atau sumbu-y dianalogikan sebagai cermin atau pusat refleksi.

## • Persamaan Umum Refleksi

### 1. Refleksi terhadap sumbu-x

Jika direfleksikan terhadap sumbu-x, maka koordinat  $y'$  merupakan lawan dari koordinat  $y$  dengan koordinat  $x$  tetap.

$$P(x, y) \xrightarrow{M_x} P'(x, -y)$$

$$\Leftrightarrow M_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Dengan :

$P(x, y)$  = titik koordinat awal

$P'(x, -y)$  = titik koordinat akhir

$M_x$  = matriks pencerminan terhadap sumbu-x

### 2. Refleksi terhadap sumbu-y

Jika direfleksikan terhadap sumbu-y, maka koordinat  $x'$  merupakan lawan dari koordinat  $x$  dengan koordinat  $y$  tetap.

$$P(x, y) \xrightarrow{M_y} P'(-x, y)$$

$$\Leftrightarrow M_y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

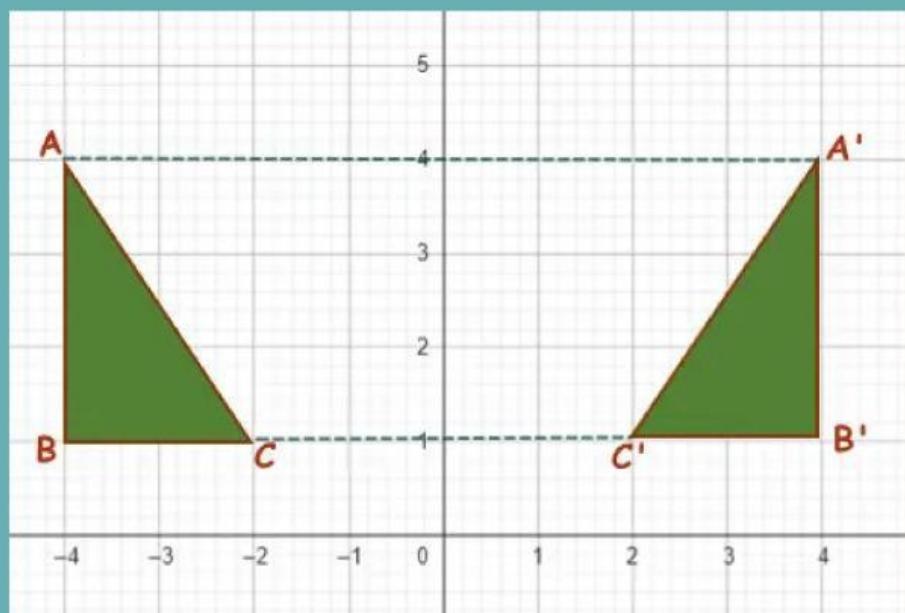
Dengan :

$P(x, y)$  = titik koordinat awal

$P'(-x, y)$  = titik koordinat akhir

$M_y$  = matriks pencerminan terhadap sumbu-y

## CONTOH



Berikut ini merupakan contoh segitiga siku-siku ABC yang direfleksikan terhadap sumbu-y. Artinya, sumbu-y dianggap sebagai cermin atau pusat refleksinya. Jika dicerminkan terhadap sumbu-y, maka koordinat  $(x, y)$  menjadi  $(-x, y)$ . Bagaimana cara membuktikannya?

### 3. ROTASI

Rotasi adalah perpindahan titik-titik suatu objek pada bidang geometri dengan cara memutarnya sejauh sudut

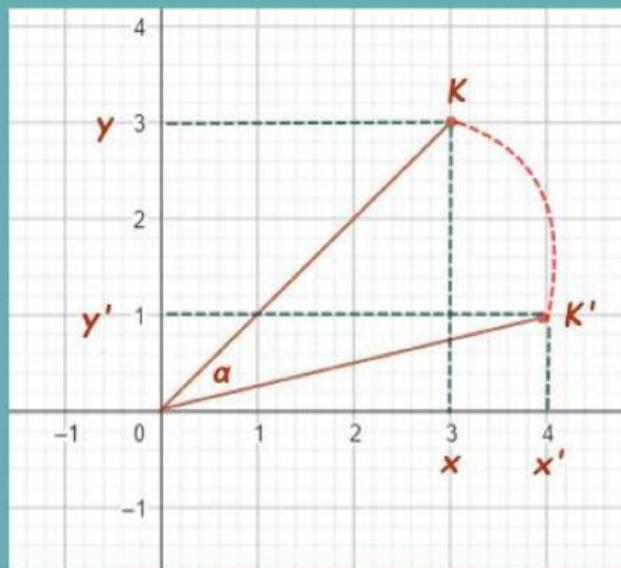
a. Oleh karena rotasi termasuk perpindahan, maka arah rotasi mempengaruhi tanda sudutnya. Jika arah rotasi searah dengan putaran jarum jam, maka sudutnya bertanda negatif. Sementara itu, jika arah rotasi berlawanan dengan arah putaran jarum jam, maka sudutnya bertanda negatif.

Secara matematis, rotasi dilambanganya sebagai  $R(P, \alpha)$ , dengan  $P$  = pusat rotasi dan  $\alpha$  = besarnya sudut rotasi.

Secara umum, rotasi dibagi menjadi dua, yaitu sebagai berikut:

- Rotasi terhadap titik pusat  $(0, 0)$
- Rotasi terhadap titik pusat  $(a, b)$

- ROTASI TERHADAP TITIK (0, 0)



Gambar di atas menunjukkan bahwa titik K dirotasi sejauh  $\alpha$  melalui titik pusat  $(0, 0)$ , hingga berada di posisi  $K'$ . Secara matematis, persamaan rotasi yang melalui titik pusat dinyatakan sebagai berikut.

$$K(x, y) \xrightarrow{R[O(0,0), \alpha]} K'(x', y')$$

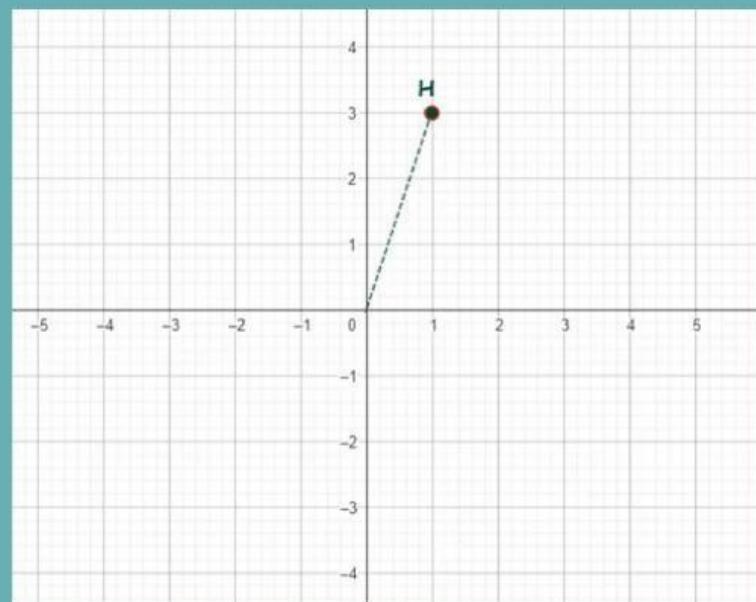
Untuk mempermudah dalam menentukan titik bayangan objek yang dirotasi terhadap pusat  $(0,0)$ , gunakan persamaan matriks berikut.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

5 = 3  
+ 1 5 +  
8  
1

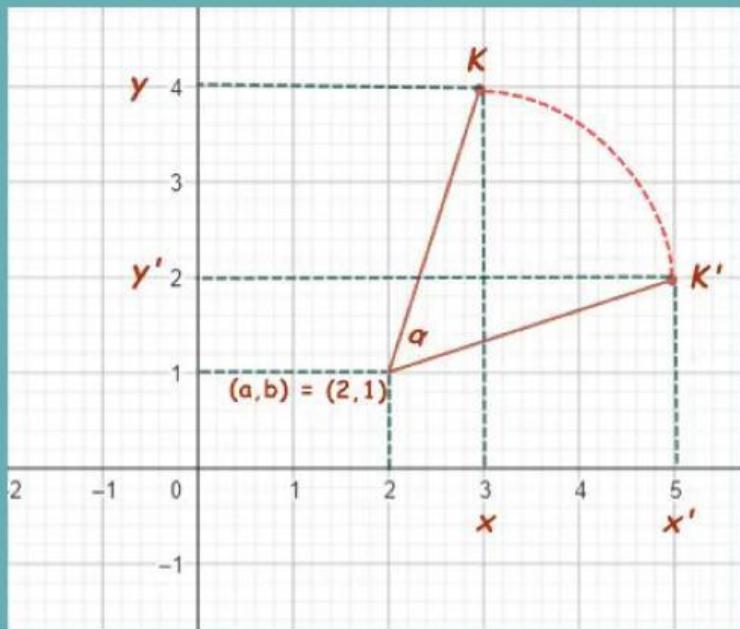
# CONTOH

Diketahui gambar titik H seperti berikut.



Jika titik H dirotasikan sejauh  $180^\circ$  terhadap titik pusat  $(0, 0)$ , gambarkan posisi akhir titik H'!

## • ROTASI TERHADAP TITIK (A, B)



Gambar di atas menunjukkan bahwa titik K dirotasi sejauh  $\alpha$  melalui titik pusat  $(2, 1)$ , hingga berada di posisi  $K'$ . Secara matematis, persamaan rotasi yang melalui titik pusat  $(a, b)$  dinyatakan sebagai berikut.

$$K(x, y) \xrightarrow{R[(a,b), \alpha]} K'(x', y')$$

Untuk mempermudah dalam menentukan titik bayangan objek yang dirotasi terhadap pusat  $(a, b)$ , gunakan persamaan matriks berikut.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

# CONTOH

Tentukan bayangan titik  $C(3,1)$  jika dirotasikan berlawanan arah jarum jam sebesar  $90^\circ$  dan berpusat  $(2, 4)$  !

## 4. DILATASI

1 Dilatasi adalah perpindahan titik-titik suatu objek terhadap titik tertentu berdasarkan faktor pengali. Oleh karena ada faktor pengali, maka peristiwa dilatasi ini bisa mengakibatkan perubahan ukuran objek, misalnya diperbesar, diperkecil, atau tetap.

Adapun hubungan antara faktor pengali dan ukuran benda adalah sebagai berikut:

- Jika  $k > 1 \rightarrow$  bangun membesar.
- Jika  $0 < k < 1 \rightarrow$  bangun mengecil.
- Jika  $k = 1 \rightarrow$  bangun tetap (tidak berubah ukuran).
- Jika  $k < 0 \rightarrow$  bangun berubah ukuran dan berpindah ke arah berlawanan dari pusat.
- Jika ( $k < -1$ ) mengakibatkan ukuran objek diperbesar dan berlawanan dengan sudut dilatasi awalnya.

Secara umum, dilatasi dibagi menjadi dua, yaitu :

- Dilatasi terhadap titik pusat  $(0, 0)$
- Dilatasi terhadap titik pusat  $(a, b)$

- DILATASI TERHADAP TITIK PUSAT (0, 0)

1 Jika suatu titik  $M (x, y)$  mengalami dilatasi terhadap titik pusat  $(0, 0)$  dengan faktor pengali  $k$ , maka akan dihasilkan koordinat  $M' (x', y')$ . Secara matematis, bisa dinyatakan sebagai berikut.

$$M(x, y) \xrightarrow{D[(0,0),k]} M'(x', y')$$

Titik koordinat  $M'(x', y')$  bisa ditentukan dengan rumus berikut.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$