1 Teknik Substitusi (Penggantian)

Teknik integrasi substitusi ini, teknik dilakukan diawal dalam penyelesaian integrasi. Apabila menggunakan teknik ini tidak bisa dilakukan maka dapat diterapkan teknik yang lain.

Contoh 1

$$\boxed{\int f(x)\,dx = \int h(u)\,du = H(u) + C = H(g(x)) + C}$$

Tentukan $\int \frac{3}{\sqrt{5-9x^2}}\,dx$

Penyelesaian :

Ingatlah bentuk $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}}$ Andaikan $u = 3x$. Maka $du = 3\,dx$

Sehingga

$$\int \frac{3}{\sqrt{5-9x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{5-u^2}}\,du = \sin^{-1}\left(\frac{u}{\sqrt{5}}\right) + C \;= \sin^{-1}\left(\frac{3x}{\sqrt{5}}\right) + C$$

Contoh 2

Selesaikan $\int \frac{2x-9}{\sqrt{x^2-9x+1}}\,dx$

Penyelesaian

$$\int \frac{2x-9}{\sqrt{x^2-9x+1}}\,dx = \int \frac{du}{\sqrt{u}} = \int u^{-\frac{1}{2}}du = \frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = 2u^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x^2-9x+1} + C$$

$$\boxed{\begin{array}{l} u = \sqrt{x^2-9x+1} \\ du = (2x-9)\,dx \end{array}}$$

Contoh 3

Selesaikan $\int (\sec x + \tan x)^2\,dx$

Penyelesaian

Untuk menyelesaikan integrasi ini, fungsi harus dikuadratkan terlebih dahulu.

$$\begin{aligned}
\int (\sec x + \tan x)^2\,dx &= \int \sec^2 x + 2\sec x \tan x + \tan^2 x\,dx \\
&= \int \sec^2 x\,dx + 2\int \sec x \tan x\,dx + \int \tan^2 x\,dx \\
&= \int \sec^2 x\,dx + 2\int \sec x \tan x\,dx + \int \sec^2 x - 1\,dx \\
&= 2\int \sec^2 x\,dx + 2\int \sec x \tan x\,dx - \int 1\,dx \\
&= 2\tan x + C_1 + 2\sec x + C_2 - x + C_3
\end{aligned}$$

LIVEWORKSHEETS

$$= 2\tan x + 2\sec x - x + C$$

Contoh 4

Selesaikan $\int \frac{3x+2}{\sqrt{1-x^2}}dx$

Penyelesaian

$\int \frac{3x+2}{\sqrt{1-x^2}}dx = 3\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx + 2\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

Misal: $u = 1 - x^2$

$du = -2x\,dx$ dan $x\,dx = -\frac{1}{2}du$

$3\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = 3\int \frac{-\frac{1}{2}du}{\sqrt{u}} = -\frac{3}{2}\int u^{-\frac{1}{2}}\,du$

$$= -\frac{3}{2}\cdot\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C_1 = -3\sqrt{1-x^2} + C_1$$

Dan, $2\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 2\sin^{-1}x + C_2$

Sehingga

$3\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = -3\sqrt{1-x^2} + C_1 + 2\sin^{-1}x + C_2 = = -3\sqrt{1-x^2} + 2\sin^{-1}x + C$

Contoh 5

Tentukan $\int \frac{7}{x^2-6x+25}dx$

Penyelesaian :

Suatu integran yang penyebutnya berbentuk suatu kuadrat kerap kali dapat dirubah menjadi bentuk baku setelah melengkapkannya menjadi sebuh kuadrat.

Ingat bahwa $x^2 + bx$ menjadi suatu kuadrat dengan menambahkan $(b/2)^2$

$$\int \frac{7}{x^2-6x+25}dx = \int \frac{7}{x^2-6x+9+16}dx$$

$$= 7\int \frac{1}{(x-3)^2+4^2}d(x-3)$$

$$= \frac{7}{4}\tan^{-1}\left(\frac{x-3}{4}\right) + C$$

Dalam pikiran, kita gunakan penggantian $u = x - 3$

Contoh 6

LIVEWORKSHEETS

Tentukan $\int_2^5 t\sqrt{t^2-4}\,dt$

Penyelesaian :

Andaikan $u = t^2 - 4$, dengan demikian $du = 2t$; perhatikan bahwa $u = 0$ jika $t = 2$ dan $u = 21$ jika $t = 5$. Jadi,

$$\int_2^5 t\sqrt{t^2-4}\,dt = \frac{1}{2}\int_2^5 (t^2-4)^{1/2}(2t\,dt)$$

$$= \frac{1}{2}\int_9^{21} u^{1/2}\,du$$

$$= [\tfrac{1}{3}u^{3/2}]_0^{21} = \tfrac{1}{3}(21)^{3/2} \approx 32{,}08$$

Contoh 7

Selesaikan $\int \sec x\ dx$

Penyelesaian:

$$\int \sec x\ dx = \int \sec x \,.\, \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x}\ dx$$

$$= \int \frac{\sec x(\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x}\ dx$$

$$= \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x}\ dx$$

mis. $u = \sec x + \tan x$; $\quad \frac{du}{dx} = \sec x\ \tan x + \sec^2 x$

$$= \int \frac{1}{u}\ du = \ln|u| + C = \ln|\sec x + \tan x| + C$$

Latihan Soal

Selesaikan integral berikut.

1. $\int \frac{dx}{x^2+4}$
2. $\int \frac{x\,dx}{x^2+4}$
3. $\int 6z\sqrt{4+z^2}\,dz$
4. $\int e^{\cos z}\sin z\ dz$
5. $\int_0^{\pi/4} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\ dx$
6. $\int \frac{\sin a - \cos a}{\sin a}\ da$
7. $\int \frac{3e^{2x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}\ dx$
8. $\int \frac{\sin(4t-1)}{1-\sin^2(4t-1)}\ dt$
9. $\int \frac{t^2\cos(t^3-2)}{\sin^2(t^3-2)}\ dt$
10. $\int \frac{t^2\cos^2(t^3-2)}{\sin^2(t^3-2)}\ dt$
11. $\int \frac{y}{\sqrt{16-9y^4}}\ dy$
12. $\int \frac{5}{\sqrt{9-4y^2}}\ dy$

LIVEWORKSHEETS

13. $\int \frac{e^{3t}}{\sqrt{4-e^{6t}}}\, dt$

14. $\int \frac{e^{2t}-e^{-2t}}{e^{2t}+e^{-2t}}\, dt$

15. $\int \frac{1}{x^2+2x+5}\, dx$

16. $\int \frac{1}{\sqrt{16+6x-x^2}}\, dx$

17. $\int \csc(\pi x - 1)\, dx$

18. $\int \frac{\cot(3+\ln x)}{x}\, dx$

19. $\int x \sec(x^2 - 5)\, dx$

20. $\int \frac{2^{\ln x}}{x}\, dx$

2 Integral Parsial

Pengintegralan Parsial Integral tak tentu : $\int u\, dv = uv - \int v\, du$

Pengintegralan Parsial Integral Tentu : $\int_a^b u\, dv = [uv]_a^b - \int_a^b v\, du$

Pada integrasi parsial, diperlukan **pemilihan *u*** dan ***dv*** yang **tepat**, sehingga bisa diintegralkan.

Contoh 1

Selesaikan $\int x \cos x\, dx$

Penyelesaian

Sesuaikan bentuk integrasi dalam integral parsial

$$\int x \cos x\, dx = \int u\, dv$$

Terdapat 4 kemungkinan pemisalan:

1. misalkan $u = 1$ dan $dv = x \cos x\, dx$
2. misalkan $u = x \cos x$ dan $dv = dx$
3. misalkan $u = \cos x$ dan $dv = x\, dx$
4. misalkan $u = x$ dan $dv = \cos x\, dx$

kemungkinan (1)

tidak dapat dilakukan karena kita tidak dapat menyelesaikan integrasi $\boxed{dv = x \cos x\, dx}$

kemungkinan (2)

$u = x \cos x,$ $\quad dv = dx$

$du = (\cos x - x \sin x)\, dx,$ $\quad v = \int dx = x$

sehingga terdapat integral baru

$$\int x \cos x\, dx = x^2 \cos x - \boxed{\int (x \cos x - x^2 \sin x)}\, dx$$

LIVEWORKSHEETS

Permasalahan lebih rumit

Kemungkinan (3)

$$u = \cos x \qquad dv = x\,dx$$

$$du = \sin x\,dx \qquad v = \int x\,dx = ½\,x^2$$

sehingga

$$\int x\cos x\,dx = \frac{1}{2}x^2\cos x - \boxed{\int \frac{1}{2}x^2 \sin x}\,dx$$

Permasalahan lebih rumit

Kemungkinan (4)

$$u = x \qquad dv = \cos x\,dx$$

$$du = dx \qquad v = \int \cos x\,dx = \sin x$$

$\int x\cos x\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + C$

Dari keempat kemungkinan hanya kemungkinan (4) yang dapat diselesaikan.

Contoh 2

Tentukan $\int_1^e \ln x\,dx$

Penyelesaian :

Kita gunakan penggantian ganda berikut

$$u = \ln x \qquad dv = dx$$

$$du = \left(\frac{1}{x}\right)dx \qquad v = x$$

Sehingga

$$\int_1^e \ln x\,dx = [x\ln x]_1^e - \int_1^e x\frac{1}{x}\,dx$$

$$= e\ln e - \int_1^e dx$$

$$= e - [x]_1^e = e - e + 1 = 1$$

Contoh 3

Selesaikan $\int x\,e^x\,dx$

Penyelesaian

LIVEWORKSHEETS

Karena fungsi yang diintegralkan adalah perkalian dari dua fungsi transenden maka harus menggunakan integral parsial

$$u = x \qquad dv = e^x\, dx$$

$$du = dx \qquad v = \int e^x\, dx = e^x$$

$$\int x\, e^x\, dx = xe^x - \int e^x\, dx = xe^x - e^x + C$$

Contoh 4

Selesaikan $\int x^2\, e^x\, dx$

Penyelesaian

$$u = x^2 \qquad dv = e^x\, dx$$

$$du = 2x\, dx \qquad v = \int e^x\, dx = e^x$$

$$\int x^2\, e^x\, dx = x^2e^x - 2\int xe^x\, dx$$

$$= x^2e^x - 2(xe^x - e^x) + C$$

$$= x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C$$

Latihan Soal

1. $\int x \sin\left(\frac{x}{2}\right)\, dx$
2. $\int \theta \cos \pi\theta\ d\theta$
3. $\int t^2 \cos t\ dt$
4. $\int x \ln x\ dx$
5. $\int arc \tan y\ dy$
6. $\int \frac{\ln x}{x^2}\, dx$
7. $\int x \cos^2 x \sin x\ dx$
8. $\int x \sec^2 x\ dx$
9. $\int r^2 \sin r\ dr$
10. $\int e^a \cos a\ da$

3 **Teknik Integrasi Dari Fungsi Trigonometri**

Jenis 1 : $\int \sin^n x\, dx, \int \cos^n x\, dx$

Perhatikan pertama apabila ***n* bilangan bulat positif ganjil**, gunakan kemudian persamaan $\mathbf{\sin^2 x + \cos^2 x = 1}$.

Untuk **n bilangan bulat positif genap,** persamaan yang digunakan adalah **sudut rangkap atau setengah sudut**, yaitu:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \text{ dan } \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

Contoh 1 (*n* ganjil).

LIVEWORKSHEETS

Tentukan $\int \sin^5 x\,dx$

Penyelesaian :

$$\int \sin^5 x\,dx = \int \sin^4 x \sin x\,dx$$

$$= \int (1-\cos^2 x)^2 \sin x\,dx$$

$$= \int (1-2\cos^2 x + \cos^4 x)\sin x\,dx$$

$$= -\int (1-2\cos^2 x + \cos^4 x)\,d(\cos x)$$

$$= -\cos x + \tfrac{2}{3}\cos^3 x - \tfrac{1}{5}\cos^5 x + C$$

Contoh 2

Tentukan $\int \cos^5 x\,dx$

Penyelesaian

$$\int \cos^5 x\,dx = \int \cos^4 x \cos x\,dx$$

$$= \int (1-\sin^2 x)^2 \cos x\,dx$$

$$= \int (1-2\sin^2 x + \sin^4 x)\cos x\,dx$$

$$= \int (1-2\sin^2 x + \sin^4 x)\,d(\sin x)$$

$$= \sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x + C$$

Contoh 3

Tentukan $\int \sin^4 x\,dx$

Penyelesaian

$$\int \sin^4 x\,dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx$$

$$= \int \frac{1-2\cos 2x+\cos^2 2x}{4}\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\int 1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\int 1\,dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx + \frac{1}{4}\int \cos^2 2x\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\int 1\,dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx + \frac{1}{8}\int (1+\cos 4x)\,dx$$

$$= \frac{3}{8}\int 1\,dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx + \frac{1}{8}\int \cos 4x\,dx$$

$$= \frac{3}{8}x - \frac{1}{2}.\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{8}.\frac{1}{4}\sin 4x + C$$

LIVEWORKSHEETS

$$= \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C$$

Jenis 2 : $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$

Pilih ***m*** atau ***n*** **bilangan bulat positif, ganjil** diubah menggunakan persamaan $\mathbf{\sin^2 x + \cos^2 x = 1}$. Apabila ***m*** dan ***n*** **keduanya positif genap** gunakan ***rumus setengah sudut*** untuk mengurangi derajat integran.

Contoh 4

Tentukan $\int \sin^3 x \cos^{-6} x\, dx$

Penyelesaian :

$$\int \sin^3 x \cos^{-6} x\, dx = \int (1-\cos^2 x)(\cos^{-6} x)(\sin x)\, dx$$

$$= \int (\cos^{-6} x - \cos^{-4} x)\, d(\cos x)$$

$$= -\left[\frac{(\cos x)^{-5}}{-5} - \frac{(\cos x)^{-3}}{-3}\right] + C$$

$$= \frac{1}{5}\sec^5 x - \frac{1}{3}\sec^3 x + C$$

Contoh 5

Selesaikan $\int \sin^2 x \cos^2 x\, dx$

Penyelesaian

$$\int \sin^2 x \cos^2 x\, dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right) dx$$

$$= \frac{1}{4}\int 1 - \cos^2 2x\ dx$$

$$= \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{4}\int \cos^2 2x\, dx$$

$$= \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{4}\int \frac{1+\cos 4x}{2}\ dx$$

$$= \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{8}\int 1 + \cos 4x\, dx$$

$$= \frac{1}{8}x - \frac{1}{4}\sin 4x\ + C$$

Jenis 3 : $\int \tan^n x\, dx, \int \cot^n x\, dx$

Untuk $\int \tan^n x\, dx$ dapat memfaktorkan $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ atau menggunakan formula berikut.

LIVEWORKSHEETS

$$\int \tan^n x\, dx = \frac{1}{n-1}\tan^{n-1}x - \int \tan^{n-2}x\, dx$$

Untuk $\int \cot^n x\, dx$ dapat memfaktorkan $\cot^2 x = \csc^2 x - 1$

Contoh 6

Tentukan $\int \tan^5 x\, dx$

Penyelesaian

$$\int \tan^5 x\, dx = \frac{1}{5-1}\tan^{5-1}x - \int \tan^3 x\, dx$$

$$= \frac{1}{4}\tan^4 x - \left(\frac{1}{2}\tan^2 x - \int \tan x\ dx\right)$$

$$= \frac{1}{4}\tan^4 x - \frac{1}{2}\tan^2 x - \ln|\cos x| + C \qquad \text{ingat } \int \tan x\, dx\ = -\ln|\cos x|$$

Contoh 7

Tentukan $\int \cot^4 x\, dx$

Penyelesaian

$$\int \cot^4 x\, dx = \int \cot^2 x(\csc^2 x - 1)\, dx$$

$$= \int \cot^2 x \csc^2 x\, dx - \int \cot^2 x\, dx$$

$$= -\int \cot^2 x\ d(\cot x) - \int (\csc^2 x - 1)\, dx$$

$$= -\tfrac{1}{3}\cot^3 x + \cot x + x + C$$

Jenis 4 : $\int \tan^m x \sec^n x\, dx, \int \cot^m x \csc^n x\, dx$

Menggunakan persamaan $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ dan $\cot^2 x = \csc^2 x - 1$

Contoh 8 (n genap, m sebarang)

Tentukan $\int \tan^{-3/2} x \sec^4 x\, dx$

Penyelesaian :

$$\int \tan^{-3/2} x \sec^4 x\, dx = \int (\tan^{-3/2} x)(1 + \tan^2 x)\sec^2 x\, dx$$

$$= \int (\tan^{-3/2} x)\sec^2 x\, dx + \int (\tan^{1/2} x)\sec^2 x\, dx$$

$$= -2\tan^{-1/2} x + \tfrac{2}{3}\tan^{3/2} x + C$$

LIVEWORKSHEETS

Jenis 5 : $\int \sin mx \cos nx\, dx, \int \sin mx \sin nx\, dx, \int \cos mx \cos nx\, dx$

Persamaan yang digunakan adalah

a) $\sin mx \ \cos nx = \frac{1}{2}[\sin(m+n)x + \sin(m-n)\,x]$

b) $\sin mx \ \sin nx = -\frac{1}{2}[\cos(m+n)x + \cos(m-n)\,x]$

c) $\cos mx \ \cos nx = \frac{1}{2}[\cos(m+n)x + \cos(m-n)\,x]$

Contoh 9

Tentukan $\int \sin 2x \cos 3x\, dx$

Penyelesaian :

$$\int \sin 2x \cos 3x\, dx = \tfrac{1}{2}\int [\sin 5x + \sin(-x)]\, dx$$

$$= \tfrac{1}{10}\int \sin 5x\ d(5x) - \tfrac{1}{2}\int \sin x\, dx$$

$$= -\tfrac{1}{10}\cos 5x + \tfrac{1}{2}\cos x + C$$

Latihan Soal

Selesaikan integral berikut.

1. $\int \cos^7 t\, dt$
2. $\int \sin^6 t\, dt$
3. $\int \cos^7 x \sin^4 dx$
4. $\int \sin^4 x \cos^4 x\, dx$
5. $\int \sin 4y \cos 5y \ \ dy$
6. $\int \cos y \cos 5y \ \ dy$
7. $\int \cot^5 u\, du$
8. $\int \tan^{-3} x \sec^4 x\, dx$
9. $\int 8\, cos^4 2\pi t\, dt$
10. $\int \tan^4\left(\frac{x}{4}\right) dx$

LIVEWORKSHEETS