

LIMIT FUNGSI TRIGONOMETRI

(Modul No.2)

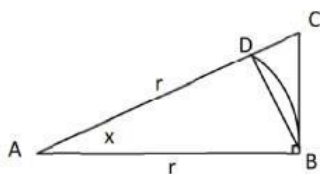
Dalam menyelesaikan limit fungsi trigonometri tentunya kita harus tahu tentang fungsi trigonometri baik dari rumus, sifat, identitas dan lain sebagainya yang dapat membantu dalam menyelesaikan soal limit fungsi trigonometri. Karena dalam menyelesaikan soal limit fungsi trigonometri tidak jauh berbeda dengan penyelesaian soal trigonometri lainnya. Substitusi dahulu nilai yang didekati x ke $f(x)$. Jika langsung didapat hasilnya, maka itulah jawabannya tetapi jika menjadi bentuk misalnya $\frac{0}{0}$ maka harus diselesaikan dengan cara tertentu dan kita pun harus mencari penyebabnya. Cara memfaktorkan dan mengalikan dengan sekawan masih dapat digunakan untuk menyelesaikan limit trigonometri jika didapat bentuk tak tentu. Khusus untuk limit trigonometri ada teorema untuk menyelesaikan limit dengan bentuk nol per nol. berikut ini adalah teorema limit fungsi trigonometri.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x} = 1$$

Catatan: rumus di atas hanya berlaku untuk $x \rightarrow 0$

Untuk membuktikannya, perhatikan penjabaran berikut:



Luas $\triangle ABD < \text{Luas juring ABD} < \text{Luas } \triangle ABC$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot AD \cdot AB \cdot \sin x < \frac{x}{2\pi} \cdot L_{\text{lingkaran}} < \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot r \cdot r \cdot \sin x < \frac{x}{2\pi} \cdot \pi \cdot r^2 < \frac{1}{2} \cdot r \cdot r \cdot \tan x$$

(dibagi dengan $\frac{1}{2} \cdot r^2$ dan x dalam radian) dan $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$$\Leftrightarrow \sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x} \text{ (dibagi } \sin x \text{)}$$

$$\Leftrightarrow 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}, \text{ untuk } x \text{ mendekati } 0 \text{ atau } x \rightarrow 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} 1 < \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} < \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x}$$

$$\Leftrightarrow 1 < \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} < \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos 0}$$

$$\Leftrightarrow 1 < \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} < 1, \text{ karena limit kiri} = \text{limit kanan}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1, \text{ begitupun untuk } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Dengan cara yang sama jika

$$\sin x < x < \tan x \text{ (dibagi } \tan x \text{)}$$

$$\Leftrightarrow \cos x < \frac{x}{\tan x} < 1, \text{ untuk } x \text{ mendekati } 0 \text{ atau } x \rightarrow 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \cos x < \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x} < \lim_{x \rightarrow 0} 1$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \cos 0 < \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x} < \lim_{x \rightarrow 0} 1$$

$$\Leftrightarrow 1 < \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x} < 1, \text{ karena limit kiri} = \text{limit kanan}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x} = 1, \text{ begitupun untuk } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

Teorema ini tidak selalu digunakan dalam menyelesaikan soal limit fungsi trigonometri, adakalanya kita mengubah bentuk trigonometri dengan menggunakan identitas trigonometri.

Rumus-rumus Limit Fungsi Trigonometri

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x} = 1$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{\sin bx} = \frac{a}{b}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{\tan bx} = \frac{a}{b}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\tan bx} = \frac{a}{b}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan bx}{\sin ax} = \frac{b}{a}$$

Contoh Soal mudah :

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin 4x}{3x} - \frac{\tan 2x}{\sin 6x} + \frac{8x}{\tan 2x} \right] = \frac{4}{3} - \frac{2}{6} + \frac{8}{2} = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} + 4 = 5$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin 5x - \tan 3x}{8x} \right] = \frac{5}{8} - \frac{3}{8} = \frac{1}{4}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 6x}{3x \cdot \tan 4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{3x} \cdot \frac{\sin 6x}{\tan 4x} = \left(\frac{6}{3} \right) \left(\frac{6}{4} \right) = \frac{36}{12} = 3$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 4x}{6x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{6x} \cdot \frac{\sin 4x}{x} = \left(\frac{4}{6} \right) \left(\frac{4}{1} \right) = \frac{8}{3}$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^3 2x}{4x^2 \sin 6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{4x} \cdot \frac{\tan 2x}{x} \cdot \frac{\tan 2x}{\sin 6x} = \left(\frac{2}{4} \right) \left(\frac{2}{1} \right) \left(\frac{2}{6} \right) = \frac{1}{3}$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \tan^2 3x \cdot \sin 2x}{4x^2 \cdot \sin 6x} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \left(\frac{\tan 3x}{4x} \right) \left(\frac{\tan 3x}{x} \right) \left(\frac{\sin 2x}{\sin 6x} \right)$$

$$= 2 \left(\frac{3}{4} \right) \left(\frac{3}{1} \right) \left(\frac{2}{6} \right)$$

$$= 3/2$$

$$(g) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 \cdot \sin^3 2x}{\sin 4x \cdot \sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} 6 \left(\frac{\sin 2x}{\sin 4x} \right) \left(\frac{\sin 2x}{\sin 3x} \right) \sin 2x$$

$$= 6 \left(\frac{2}{4} \right) \left(\frac{2}{3} \right) \sin 2(0)$$

$$= \left(\frac{24}{12} \right) 0$$

$$= 0$$

Contoh Soal Sedikit sulit :

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{6x^2 + \sin^2 3x}{\tan^2 2x - x^2} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\frac{6x^2}{x^2} + \frac{\sin^2 3x}{x^2}}{\frac{\tan^2 2x}{x^2} - \frac{x^2}{x^2}} \right]$$

$$= \left[\frac{\frac{6}{1} + \frac{9}{1}}{\frac{4}{1} - \frac{1}{1}} \right]$$

$$= \left(\frac{6+9}{4-1} \right)$$

$$= 5$$

$$\begin{aligned}
 2. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(3x^2 - 30x + 75)}{\sin^2(2x - 10)} &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(3x^2 - 30x + 75)}{\sin^2(2x - 10)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{3(x-5)(x-5)}{\sin 2(x-5) \cdot \sin 2(x-5)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 5} \left(\frac{3(x-5)}{\sin 2(x-5)} \right) \left(\frac{(x-5)}{\sin 2(x-5)} \right) \\
 &= \left(\frac{3}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \right) \\
 &= \frac{3}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(4x^2 - 16x + 12)}{\tan(2x - 6)} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{4(x-3)(x-1)}{\tan 2(x-3)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 3} (x-1) \frac{4(x-3)}{\tan 2(x-3)} \\
 &= (3-1) \left(\frac{4}{2} \right) \\
 &= 4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{\cos 8x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2(3x)}{\cos 2(4x) - 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \sin^2 3x}{-2 \cdot \sin^2 4x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} - \left(\frac{\sin 3x}{\sin 4x} \right)^2 \\
 &= - \left(\frac{.3}{.4} \right)^2 \\
 &= - \frac{.9}{.16}
 \end{aligned}$$

$\sin A + \sin B = 2 \cdot \sin \frac{1}{2}(A+B) \cdot \cos \frac{1}{2}(A-B)$ $\sin A - \sin B = 2 \cdot \cos \frac{1}{2}(A+B) \cdot \sin \frac{1}{2}(A-B)$ $\cos A + \cos B = 2 \cdot \cos \frac{1}{2}(A+B) \cdot \cos \frac{1}{2}(A-B)$ $\cos A - \cos B = -2 \cdot \sin \frac{1}{2}(A+B) \cdot \sin \frac{1}{2}(A-B)$

$$\begin{aligned}
 5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 5x - \cos 3x}{1 - \cos 8x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin \frac{1}{2}(5x+3x) \cdot \sin \frac{1}{2}(5x-3x)}{1 - \cos 2(4x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin 4x \cdot \sin x}{2 \sin^2 4x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{\sin 4x} \\
 &= -\frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
6. \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{3 \sin 4x}{\cos x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{3(2 \sin 2x \cos 2x)}{\cos x} \\
&= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{6 \sin 2x \cos 2x}{\cos x} \\
&= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{6(2 \sin x \cos x) \cos 2x}{\cos x} \\
&= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} 12 \sin x \cos 2x \\
&= 12 \sin \frac{\pi}{2} \cos 2\left(\frac{\pi}{2}\right) \\
&= 12 \sin \frac{\pi}{2} \cos \pi \\
&= 12(1)(0) \\
&= 0
\end{aligned}$$

1. $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$
2. $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$
3. $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$
4. $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$
5. $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$
6. $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$
7. $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$
8. $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$
 $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$
 $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$
9. $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$
10. $\sin^2 \alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\alpha$
11. $\cos^2 \alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\alpha$
12. $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$

$$\begin{aligned}
7. \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin 6x + \sin 2x}{\cos 5x + \cos x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2 \sin 3x \cos 2x}{2 \cos 4x \cos 2x} \\
&= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin 3x}{\cos 4x} \\
&= \frac{\sin 3\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\cos 4\left(\frac{\pi}{4}\right)} \\
&= \frac{\sin \frac{3\pi}{4}}{\cos \pi} \\
&= \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{-1} \\
&= -\frac{1}{2}\sqrt{3}
\end{aligned}$$

13. $\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$
14. $2 \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$
15. $2 \cos \alpha \sin \beta = \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)$
16. $2 \cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$
17. $-2 \sin \alpha \cos \beta = \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)$

Latihan 2.1 :

1. Tentukanlah hasil setiap limit fungsi trigonometri berikut ini

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin 4x}{3x} - \frac{\tan 2x}{\sin 6x} + \frac{8x}{\tan 2x} \right]$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin 5x + \tan 3x}{8x} \right]$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \sin 3x \cdot \tan 2x}{6x \cdot \sin 5x}$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 4x}{6x^2}$

(e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^3 2x}{(2x)^2 \sin 6x}$

(f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \tan^2 3x \cdot \sin 2x}{3x^2 \cdot \tan 4x}$

(g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 \cdot \sin^3 2x}{\sin 4x \cdot \tan 3x}$

(h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+2) \cdot \sin^2 3x}{2x \cdot \tan 6x}$

2. Tentukanlah hasil setiap limit fungsi trigonometri berikut ini

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{2x + \sin 4x}{\sin 3x + \tan x} \right]$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{6x^2 + \sin^2 3x}{x^2 - \tan^2 2x} \right]$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 2 \sin 3x \cdot \tan 4x}{3x \cdot \tan 4x - \sin^2 3x}$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 12x}{\tan 6x}$

3. Tentukanlah hasil setiap limit fungsi trigonometri berikut ini

(a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(3x-6)}{x^2 + 2x - 8}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(4x^2 - 16x + 12)}{\tan(2x-6)}$

(c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(3x^2 - 12)}{5x - 10}$

(d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\tan(2x^2 - 6x + 4)}{4x^2 + 8x - 12}$

4. Tentukanlah hasil setiap limit fungsi trigonometri berikut ini

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin 2x - \tan 3x}{\tan 6x} \right]$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{4x^2 + \sin^2 2x}{\tan^2 4x} \right]$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{2 \sin^2 2x - \sin^2 x}{x \cdot \tan x} \right]$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\tan^2 4x + 3 \sin^2 2x}{2 \sin^2 x - 4x^2} \right]$

5. Tentukanlah hasil setiap limit fungsi trigonometri berikut ini

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1 - \cos 4x}{x^2} \right]$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\cos 6x - 1}{3 \tan^2 x} \right]$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{3 - 3 \cos 2x}{\sin^2 3x} \right]$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{6 \cos 2x - 6}{2 - 2 \cos 4x} \right]$

(e) $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1 - \cos^2 x}{1 - \cos 4x} \right]$

(f) $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\cos x - 1}{2 - 2 \cos^2 x} \right]$

(g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 8x}{2x \cdot \sin x \cdot \cos x}$

(h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - \sin 3x \cdot \cos 4x}{2x^3}$

LIMIT FUNGSI PIECEWISE

Limit fungsi piecewise adalah nilai yang didekati oleh fungsi ketika variabelnya mendekati suatu titik, dengan mempertimbangkan interval yang berbeda tempat fungsi tersebut didefinisikan. Untuk mencari limit fungsi piecewise, kita perlu memeriksa limit dari kiri dan limit dari kanan pada titik yang dituju, karena fungsi tersebut bisa memiliki rumus yang berbeda pada interval yang berbeda.

Untuk mencari limit fungsi piecewise, ikuti langkah-langkah berikut:

1. Identifikasi titik yang dituju (c): Tentukan titik di mana Anda ingin mencari limit.
2. Tentukan interval yang relevan:

Perhatikan interval tempat fungsi tersebut didefinisikan di sekitar titik c. Apakah titik c termasuk dalam interval di mana g(x) berlaku, atau h(x), atau keduanya?

3. Hitung limit berdasarkan kategori jenis fungsi yang didapat dan selesaikan dengan metode yang sesuai

Contoh :

$$\text{Diketahui } f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{untuk } 0 < x < 1; \\ 1, & \text{untuk } x = 1; \\ 3 - x, & \text{untuk } 1 < x \leq 3; \\ 1 + (x - 3)^2, & \text{untuk } x > 3. \end{cases}$$

Tentukan Benar atau Salah untuk setiap pernyataan berikut!

Pernyataan	Benar	Salah
$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$	☐	☐
$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 0$	☐	☐
$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 2$	☐	☐

Jawab :

- a. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} 1$ (pilih fungsi saat $x = 1$)
 $= 1$ (maka pilihan jawaban salah)
- b. $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} (3 - x)$ (pilih fungsi saat $1 < x \leq 3$)
 $= (3 - 3)$
 $= 0$ (maka pilih jawaban yang benar)
- c. $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} (1 + (x - 3)^2)$ (pilih fungsi saat $x > 3$)
 $= (1 + (4 - 3)^2)$
 $= (1 + 1^2)$
 $= 2$ (maka pilih jawaban yang benar)

Latihan 2.2

Diketahui :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x^3 - 13x^2 - 10x + 56}{x + \sqrt{x + 6}}, & \text{untuk } x < 0 \\ \frac{1 - \cos 16x}{\tan^2 6x}, & \text{untuk } x = 0 \\ \frac{\sqrt{x + 4} - \sqrt{2x + 1}}{\sqrt{x^2 - 5} - \sqrt{x + 1}}, & \text{untuk } 0 < x \leq 10 \\ \sqrt{9x^2 - 8x + 7} - \sqrt{9x^2 + 9x - 3}, & \text{untuk } x > 10 \end{cases}$$

Tentukan

1. $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) =$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) =$
3. $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) =$
4. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) =$