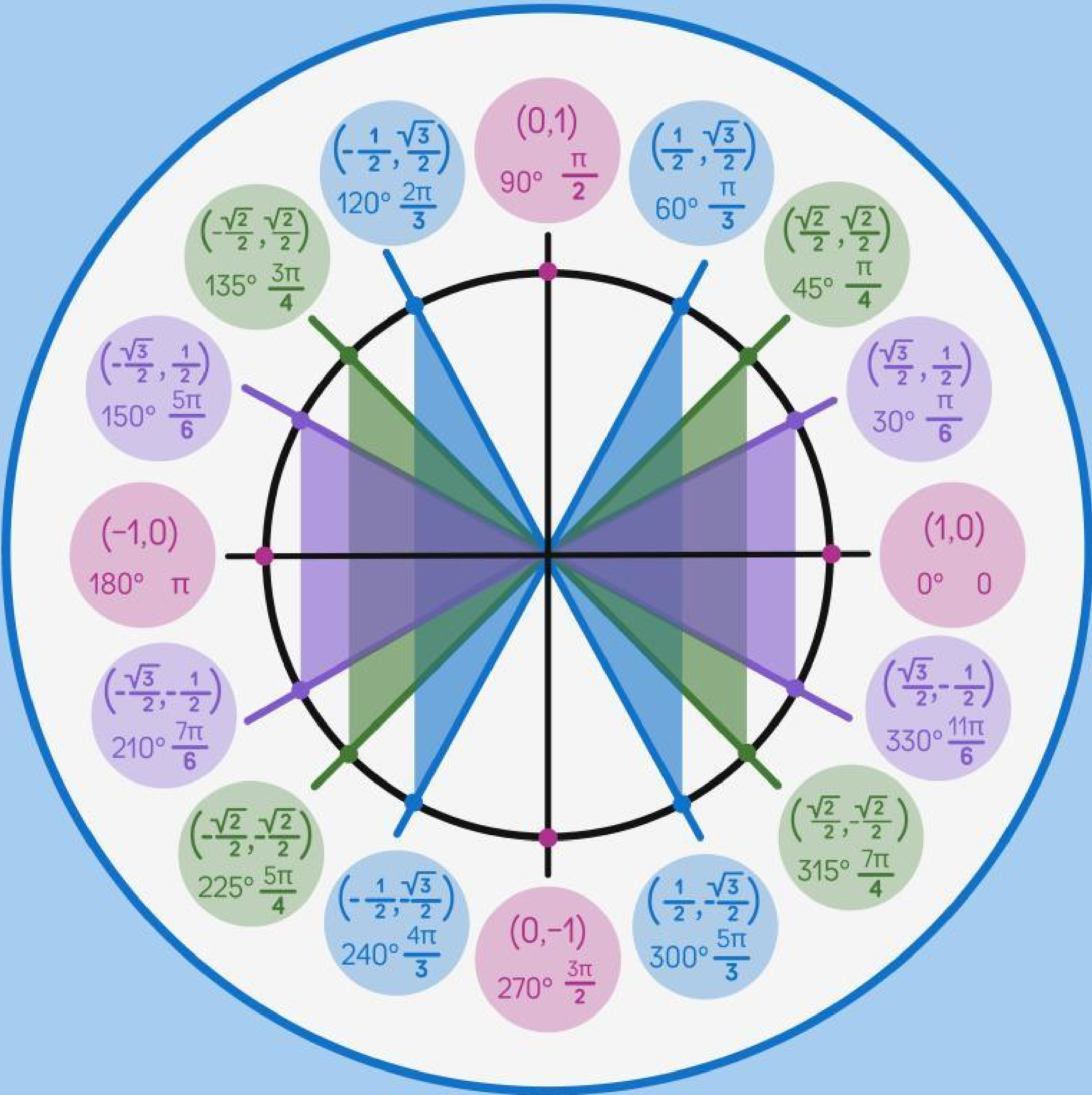
PERBANDINGAN TRIGONOMETRI



EVA SARIPAH

ELIS LISNAWATI

NENSI ROHIMAH

IRFAN HARTONO

SUB BAB I
UKURAN SUDUT

A. Tujuan Pembelajaran

1. Memahami satuan ukuran sudut dalam radian dan derajat,
2. Mengubah satuan ukuran sudut dari bentuk radian ke bentuk derajat dan sebaliknya.

B. Masalah Konstektual

Masalah 1:

Navigasi dan Arah Pak Budi adalah seorang pilot yang akan terbang dari Jakarta ke Surabaya. Kompas pesawat menunjukkan arah utara sebagai $0°$. Jika bandara tujuan berada pada sudut $75°$ dari arah utara (searah jarum jam), dan karena cuaca buruk pilot harus berbelok $25°$ ke kiri dari rute semula, berapakah sudut akhir pesawat dari arah utara?

Masalah 2:

Arsitektur dan Konstruksi Seorang arsitek merancang atap rumah dengan bentuk segitiga. Sudut kemiringan atap bagian kiri adalah $35°$, sedangkan sudut kemiringan atap bagian kanan adalah 40°. Jika kedua sisi atap bertemu di puncak, berapakah besar sudut yang terbentuk di puncak atap tersebut?

Masalah 3:

Olahraga Dalam permainan sepak bola, seorang pemain berada di sudut lapangan dan akan menendang bola ke gawang. Jika sudut tendangan dari garis gawang adalah 30°, dan pemain tersebut harus mengubah arah tendangannya sebesar 15° untuk menghindari penjaga gawang, berapakah sudut akhir tendangan dari garis gawang?

Masalah 4:

Jam dan Waktu Pada pukul 03.00, berapakah besar sudut yang dibentuk oleh jarum jam dan jarum menit? Jika 30 menit kemudian, berapakah perubahan sudut yang terjadi?

Masalah 5:

Teknologi dan Fotografi Seorang fotografer ingin mengambil gambar gedung tinggi. Kamera harus diarahkan ke atas dengan sudut elevasi 65° dari posisi horizontal. Jika fotografer kemudian ingin mengambil gambar detail bagian atas gedung dan harus menaikkan sudut kamera sebesar 10°, berapakah sudut elevasi akhir kamera?

Masalah 6:

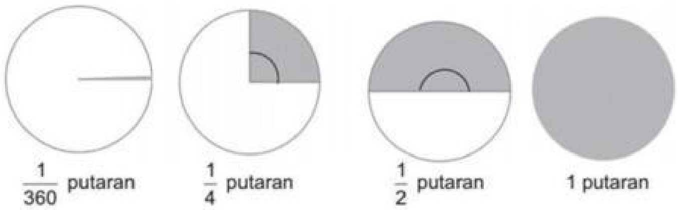
Astronomi Seorang pengamat bintang melihat planet Mars pada sudut elevasi 45° dari horizon. Setelah 2 jam, planet tersebut bergerak dan posisinya turun 20°. Berapakah sudut elevasi Mars sekarang dari horizon?

Masalah-masalah ini dirancang untuk membantu siswa memahami bahwa konsep ukuran sudut tidak hanya penting dalam matematika, tetapi juga sangat relevan dalam berbagai bidang kehidupan seperti navigasi, arsitektur, olahraga, dan teknologi.

C. Materi dan Contoh Soal

Sesuatu yang bisa diukur itu memiliki satuan ukuran untuk mengukurnya. Begitu pula dengan sudut. Satuan sudut yang paling sering kita temui dan dipergunakan adalah derajat (dilambangkan dengan "o"). Namun, ada satuan lain yang dapat digunakan untuk mengukur satuan sudut, yaitu satuan radian (dilambangkan dengan "rad"). bahwa besar sudut dalam satu putaran penuh adalah 3600 atau 10 didefinisikan sebagai besar sudut yang dibentuk oleh

$\frac{1}{360}$ putaran penuh. Satuan derajat ini berasal dari peradaban manusia yang mengaitkannya dengan musim yang dipengaruhi oleh perputaran bumi terhadap matahari. Dalam 1 (satu) kali revolusi bumi menyelesaikannya dalam 360 hari. Coba Kalian cermati gambar berikut:



Gambar 1.1

Dari gambar 1.1 didapat besar sudut berikut:

$\frac{1}{360}$ putaran $= \frac{1}{360}.360^0 = 1^0$

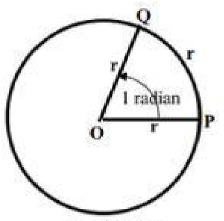
$\frac{1}{4}$ putaran $= \frac{1}{4}.\ 360^0 = 90^0$

$\frac{1}{2}$ putaran $= \frac{1}{2}.\ 360^0 = 180^0$

$\frac{1}{12}$ putaran $= \frac{1}{12}.\ 360^0 = 30^0$

$\frac{1}{8}$ putaran $= \frac{1}{8}.\ 360^0 = 45^0$

Selain ukuran derajat, kita juga mengenal ukuran radian. satu radian atau 1 rad adalah besarnya sudut yang dibentuk oleh dua buah jari-jari lingkaran berjari-jari r dan membentuk busur sepanjang r juga atau besar sudut pusat dari suatu lingkaran yang panjang busur dihadapan sudut tersebut adalah sama dengan jari-jari lingkaran tersebut. Panjang busur suatu lingkaran dapat dihitung langsung dengan mengalikan besarnya sudut dengan jari-jari lingkaran, apabila besarnya sudut telah dalam satuan radian.



Gambar 1.2

Dari gambar di atas,

$$\text{Besar sudut POQ} = \frac{\text{Panjang busur PQ}}{r} \text{ radian}$$
$$= \frac{r}{r} \text{ radian}$$
$$= 1 \text{ radian}$$

Hubungan satuan derajat dengan satuan radian adalah bahwa satu putaran penuh sama dengan 2π radian. Untuk lebih jelasnya, dapat kita lihat seperti di bawah ini.

Satu putaran penuh = $360^0 = 2\pi$ radian

$\frac{1}{2}$ putaran $= \frac{1}{2} \times 360^0 = 180^0 = \frac{1}{2} \times 2\pi \text{ radian} = \pi \text{ radian}$

$\frac{1}{360}$ putaran $= \frac{1}{360} \times 360^0 = 1^0 = \frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{180} \text{ radian}$

Maka didapat $1 \text{ rad} = \frac{180}{\pi} 1^0 \approx 57,3^0$

$$\frac{1}{4} \text{putaran} = \frac{1}{4} \times 360° = 90° \Leftrightarrow 90° = 90 \times \frac{\pi}{180} rad = \frac{1}{4} \pi \, rad$$
$$\frac{1}{3} \text{putaran} = \frac{1}{3} \times 360° = 120° \Leftrightarrow 120° = 120 \times \frac{\pi}{180} rad = \frac{1}{3} \pi \, rad$$
$$\frac{1}{2} \text{putaran} = \frac{1}{2} \times 360° = 180° \Leftrightarrow 180° = 180 \times \frac{\pi}{180} rad = \frac{1}{2} \pi \, rad$$
$$\frac{2}{3} \text{putaran} = \frac{2}{3} \times 360° = 240° \Leftrightarrow 240° = 240 \times \frac{\pi}{180} rad = \frac{2}{3} \pi \, rad$$
$$\frac{3}{4} \text{putaran} = \frac{3}{4} \times 360° = 270° \Leftrightarrow 270° = 270 \times \frac{\pi}{180} rad = \frac{3}{4} \pi \, rad$$

Tentunya dengan mudah kalian mampu mengubah ukuran sudut yang lain. Untuk lebih memahami masalah hubungan antara derajat dengan radian, coba Kalian perhatikan contoh-contoh berikut:

Contoh 1 :

Selesaikan soal-soal ukuran sudut berikut: $\frac{1}{4} \pi$ rad = ….putaran = ….^{0}

Jawab:

1 putaran = $360^0 = 2\pi$ rad, jadi $\frac{1}{2}$putaran = $180^0 = \pi$. Oleh karena itu $\frac{1}{4} \pi \, rad = \frac{1}{4} \, x \frac{1}{2} \, putaran = \frac{1}{8} \, putaran = \frac{1}{8} \, x \, 360^0 = 45^0$.

Contoh 2

Berapa radian sudut yang dibentuk jarum jam pada pukul 11.00?

Jawab:

Sudut yang terbentuk pada pukul 11.00 adalah 30^0. Jadi $30^0 = 30\ x\ \frac{\pi}{180}$ rad $= \frac{1}{6}\pi\ rad$.

Kuis

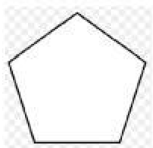
Kerjakan soal berikut dengan benar!

1. Berapakah besar sudut dua putaran penuh dalam derajat?
   a. 90°
   b. 180°
   c. 270°
   d. 360°
   e. 720^0

2. Sudut terkecil antara jarum jam dan jarum menit adalah …
   a. 60°
   b. 90°
   c. 120°
   d. 150°
   e. 30°

Pukul 02.00

3. Seorang pelukis membuat pola segi lima beraturan. Berapakah besar sudut dalam dari setiap sudut segi lima tersebut?
   a. 108°
   b. 100°
   c. 120°
   d. 135^0
   e. 150°



4. Jika sudut A + sudut B = 180°, dan sudut A adalah 2 kali sudut B, maka besar sudut A adalah …
   a. 60°
   b. 90°
   c. 100°
   d. 120°
   e. 150°

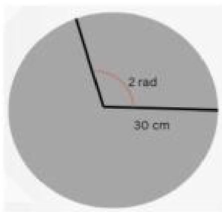
5. Sudut 240^0 jika dinyatakan dalam bentuk radian manjadi …
   a. 4/3 π rad
   b. 3/4 π rad
   c. 1/2 π rad

d. 6/5 π rad
e. 7/2 π rad

6. Konversi nilai sudut 7/6 □ rad dalam bentuk derajat adalah …
   a. 150^0
   b. 175^0
   c. 210^0
   d. 315^0
   e. 330^0

7. Konversi nilai sudut $75,4^0$ dalam bentuk derajat menit dan detik adalah …
   a. $75^0 20'$
   b. $75^0 24'$
   c. $75^0 24' 5''$
   d. $75^0 30' 6''$
   e. $75^0 45' 2''$

8. Panjang busur dan luas sektor (juring) lingkaran tersebut berturut-turut adalah…
   a. 30 cm dan 250 cm^2
   b. 60 cm dan 900 cm^2
   c. 70 dan 500 cm^2
   d. 75 dan 600 cm^2
   e. 80 dan 720 cm^2



9. Jarak yang ditempuh sepeda dengan roda yang memiliki jari-jari 30 cm, jika roda itu berputar 200 putaran adalah …
   a. 800 cm
   b. 920 cm
   c. 980 cm
   d. 1050 cm
   e. 1200 cm

10. Sebuah roda berputar dengan laju sudut 72 rpm (revolution per minute atau putaran per menit). Laju roda itu dalam satuan rad per sekon adalah …
    a. 0,8 π rad per menit
    b. 1,5 π rad per menit
    c. 1,7 π rad per menit
    d. 2,4 π rad per menit
    e. 2,6 π rad per menit

SUB BAB II

Rasio/Perbandingan Trigonometri

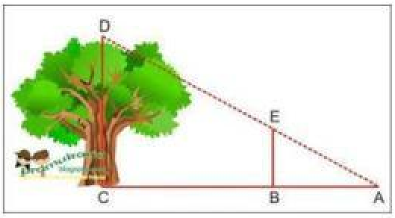
Pada Segitiga Siku-Siku

A. Tujuan Pembelajaran

1. Memahami rasio/perbandingan trigonometri (sinus, cosinus, tangen, secan, cosecan dan cotangen) pada segitiga siku-siku.
2. Menghitung rasio/perbandingan trigonometri (sinus, cosinus, tangen, secan, cosecan dan cotangen) pada segitiga siku-siku.
3. Menyelesaikan masalah menggunakan rasio/perbandingan trigonometri (sinus, cosinus, tangen, cosecan, secan, dan cotangen).

B. Masalah Konstektual

Masalah 1: Mengukur Tinggi Pohon



Seorang peserta didik berdiri sejauh 20 meter dari sebuah pohon dan mengukur sudut elevasi ke puncak pohon sebesar 40°. Berapakah tinggi pohon tersebut?

Masalah 2: Kemiringan Tangga

Sebuah tangga bersandar pada dinding dengan membentuk sudut 60° terhadap lantai. Jika panjang tangga 5 meter, seberapa tinggi tangga tersebut mencapai dinding?

Masalah 3: Bayangan Tiang

Pada pukul 10 pagi, sebuah tiang menara menjatuhkan bayangan sepanjang 8 meter. Jika sudut elevasi matahari saat itu adalah 50°, berapa tinggi tiang menara tersebut?

Masalah 4: Pandangan dari Gedung

Dari lantai 10 sebuah gedung, seseorang melihat sebuah mobil di parkiran dengan sudut depresi 30°. Jika tinggi lantai 10 dari tanah adalah 25 meter, berapa jarak horizontal antara mobil dan gedung?

Masalah 5: Fotografi

Seorang fotografer ingin mengambil gambar dari atas tebing ke arah perahu di laut dengan sudut depresi 35°. Jika tinggi tebing 60 meter, berapakah jarak horizontal perahu dari kaki tebing?

C. Materi dan Contoh Soal

Perhatikan gambar. Segitiga ABC merupakan segitiga siku-siku dengan titik sudut siku-siku di C. Panjang sisi di hadapan sudut A adalah a satuan, panjang sisi di hadapan sudut B adalah b satuan, dan panjang sisi di hadapan sudut C adalah c satuan. Pada gambar, diketahui $\angle BAC = \alpha$. Sisi BC = a disebut sisi di depan sudut α, sisi AC = b disebut sisi di samping sudut α, dan sisi AB = c disebut sisi miring (hipotenusa). Dari ketiga sisi segitiga siku-siku ABC tersebut, dapat ditentukan perbandinga-perbandingan trigonometri sebagai berikut. Definisi : Perbandingan Trigonometri pada Segitiga Siku-Siku

a. $\text{sinus } \alpha = \dfrac{\text{sisi di depan sudut } \alpha}{\text{sisi miring}} = \dfrac{a}{c}$

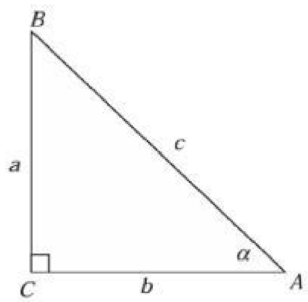
b. $\text{cosinus } \alpha = \dfrac{\text{sisi di samping sudut } \alpha}{\text{sisi miring}} = \dfrac{b}{c}$

c. $\text{tangen } \alpha = \dfrac{\text{sisi di depan sudut } \alpha}{\text{sisi di samping sudut } \alpha} = \dfrac{a}{b}$

d. $\text{co tangen } \alpha = \dfrac{\text{sisi di samping sudut } \alpha}{\text{sisi di depan sudut } \alpha} = \dfrac{b}{a}$

e. $\text{secan } \alpha = \dfrac{\text{sisi miring}}{\text{sisi di samping sudut } \alpha} = \dfrac{c}{b}$

f. $\text{cosecan } \alpha = \dfrac{\text{sisi miring}}{\text{sisi di depan sudut } \alpha} = \dfrac{c}{a}$



Catatan : Untuk selanjutnya, penulisan sinus dan cosinus disingkat sin dan cos, penulisan tangen dan cotangen disingkat tan dan cot, penulisan secan dan cosecan disingkat sec dan cosec (atau csc). Berdasarkan definisi di atas, dapat diturunkan rumus-rumus dasar trigonometri berikut ini.

a. $\sec \alpha = \dfrac{1}{\cos \alpha}$

b. $\text{cosec } \alpha = \dfrac{1}{\sin \alpha}$

c. $\cot \alpha = \dfrac{1}{\tan \alpha}$

d. $\tan \alpha = \dfrac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$

e. $\cot \alpha = \dfrac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$

Contoh 1

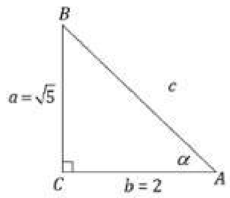
Diketahui segitiga ABC siku-siku di C dengan panjang sisi a = 5 satuan dan panjang sisi b = 2 satuan. Jika $\angle BAC = \alpha$, tentukanlah nilai keenam perbandingan trigonometri untuk sudut α.

Jawab:

Nilai c dihitung dengan menggunakan teorema Pythagoras:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(\sqrt{5})^2 + 2^2} = \sqrt{5+4} = \sqrt{9} = 3$$

Jadi, nilai perbandingan trigonometri sudut α adalah:

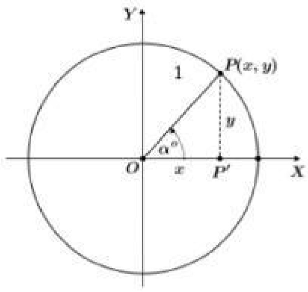


$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{1}{3}\sqrt{5} \qquad \cot\alpha = \frac{b}{a} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2}{5}\sqrt{5}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{2}{3} \qquad \sec\alpha = \frac{c}{b} = \frac{3}{2}$$

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{5} \qquad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{c}{a} = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3}{5}\sqrt{5}$$

Perbandingan Trigonometri Sudut-Sudut Istimewa Sudut istimewa adalah suatu sudut di mana nilai perbandingan trigonometrinya dapat ditentukan secara langsung tanpa menggunakan daftar trigonometri atau kalkulator. Sudut-sudut yang dimaksud adalah sudut-sudut yang besarnya 0^0 , 30^0, 45^0, 60^0, dan 90^0. Nilai perbandingan trigonometri untuk sudut-sudut istimewa dapat ditentukan dengan menggunakan konsep lingkaran satuan seperti pada gambar berikut.



Berdasarkan definisi perbandingan trigonometri, diperoleh hubungan:

$$\sin \alpha^o = \frac{PP'}{OP} = \frac{y}{1} = y$$

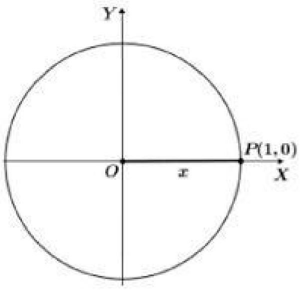
$$\cos \alpha^o = \frac{OP'}{OP} = \frac{x}{1} = x$$

$$\tan \alpha^o = \frac{PP'}{OP'} = \frac{y}{x}, \text{ dengan syarat } x \neq 0.$$

Jadi, dalam lingkaran satuan ini koordinat titik $P(x, y)$ dapat dinyatakan sebagai $P(\cos \alpha^o, \sin \alpha^o)$.

1. Nilai Perbandingan Trigonometri untuk Sudut 0^0.

   Perhatikan gambar di bawah. Koordinat titik P adalah (1, 0), sehingga (1, 0) = (cos 0, sin 0) maka diperoleh:



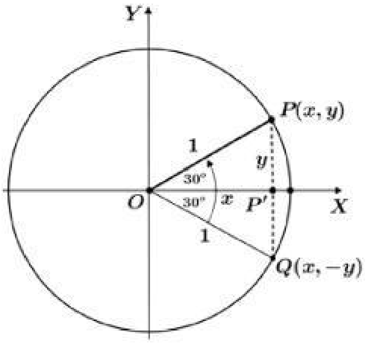
$\sin 0^o = 0$

$\cos 0^o = 1$

$\tan 0^o = \frac{\sin 0^o}{\cos 0^o} = \frac{0}{1} = 0$

2. **Nilai Perbandingan Trigonometri untuk Sudut 30^0**

   Perhatikan gambar di samping. Jika $\alpha^0 = 30^0$, maka $\angle OPQ = 60^0$, sehingga ΔOPQ merupakan segitiga sama sisi dengan panjang sisi OP = OQ = PQ = 1, dan PP' = QP' = $\frac{1}{2}$ atau ordinat y = $\frac{1}{2}$.



$\Delta OPP'$ siku-siku di P', dengan menggunakan teorema Pythagoras diperoleh hubungan:

$(OP')^2 + (PP')^2 = (OP)^2$

$\Leftrightarrow \quad (OP')^2 = (OP)^2 - (PP')^2$

$\Leftrightarrow \quad (OP')^2 = 1^2 - (\frac{1}{2})^2$

$\Leftrightarrow \quad (OP')^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$\Leftrightarrow \quad OP' = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

OP' menyatakan absis titik P atau $x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

Jadi, untuk $\alpha^o = 30^o$, maka koordinat titik P

adalah $(\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2}) = (\cos 30^o, \sin 30^o)$, maka diperolel

$\sin 30^o = \frac{1}{2}$,

$\cos 30^o = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, dan

$\tan 30^o = \frac{\sin 30^o}{\cos 30^o} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$

3. Nilai Perbandingan Trigonometri untuk Sudut 45^0

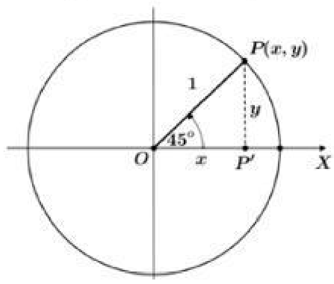
Perhatikan gambar di samping. Jika $\alpha^0 = 45^0$, maka ΔOPP' merupakan segitiga sama kaki dengan panjang sisi OP = PP' atau x = y. Dengan menggunakan teorema Pythagoras diperoleh hubungan:

$(OP')^2 + (PP')^2 = (OP)^2$

$\Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 = 1$

$\Leftrightarrow \quad 2x^2 = 1$

$\Leftrightarrow \quad x^2 = \frac{1}{2}$



$\Leftrightarrow \qquad x = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

Karena $x = y$, maka $y = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

Jadi, untuk $\alpha^o = 45^o$, maka koordinat titik P adalah $(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}) = (\cos 45^o, \sin 45^o)$, maka diperoleh:

$\sin 45^o = \frac{1}{2}\sqrt{2}$,

$\cos 45^o = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, dan

$\tan 45^o = \frac{\sin 45^o}{\cos 45^o} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{2}} = 1$

4. Nilai Perbandingan Trigonometri untuk Sudut 60^0 Perhatikan gambar di samping. Jika $\alpha^0 = 60^0$, maka ΔOPQ merupakan segitiga sama sisi dengan panjang sisi OP = OQ = PQ = 1, dan OP' = QP' = $\frac{1}{2}$ sehingga absis x = 1 2 . Dengan menggunakan teorema Pythagoras diperoleh hubungan:

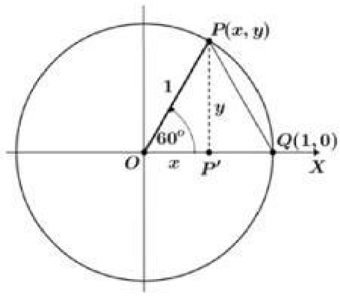
$(OP')^2 + (PP')^2 = (OP)^2$

$\Leftrightarrow \qquad (PP')^2 = (OP)^2 - (OP')^2$

$\Leftrightarrow \qquad (PP')^2 = 1^2 - (\frac{1}{2})^2$

$\Leftrightarrow \qquad (PP')^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$\Leftrightarrow \qquad PP' = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$



PP' menyatakan ordinat titik P atau $y = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

Jadi, untuk $\alpha^o = 60^o$, maka koordinat titik P adalah $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}) = (\cos 60^o, \sin 60^o)$, maka diperoleh:

$\sin 60^o = \frac{1}{2}\sqrt{3}$,

$\cos 60^o = \frac{1}{2}$, dan

$\tan 60^o = \frac{\sin 60^o}{\cos 60^o} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

5. Nilai Perbandingan Trigonometri untuk Sudut 90^0 Perhatikan gambar di bawah. Jika $\alpha^0 = 90^0$, maka kaki sudut OP berimpit dengan sumbu Y