SMA SINT LOUIS

e-Modul

MATEMATIKA

Turunan Fungsi Aljabar

Disusun oleh

Herybertus Priya Sulistya

2025

DAFTAR ISI

GLOSARIUM

Garis singgung (disebut juga **garis tangen**) kurva bidang pada titik yang diketahui adalah garis lurus yang "hanya menyentuh" kurva pada titik tersebut.

Titik Singgung : Titik persinggungan antara dua kurva

Turunan :Pengukuran terhadap bagaimana fungsi berubah seiring perubahan nilai input, atau secara umum turunan menunjukkan bagaimana suatu besaran berubah akibat perubahan besaran lainnya.

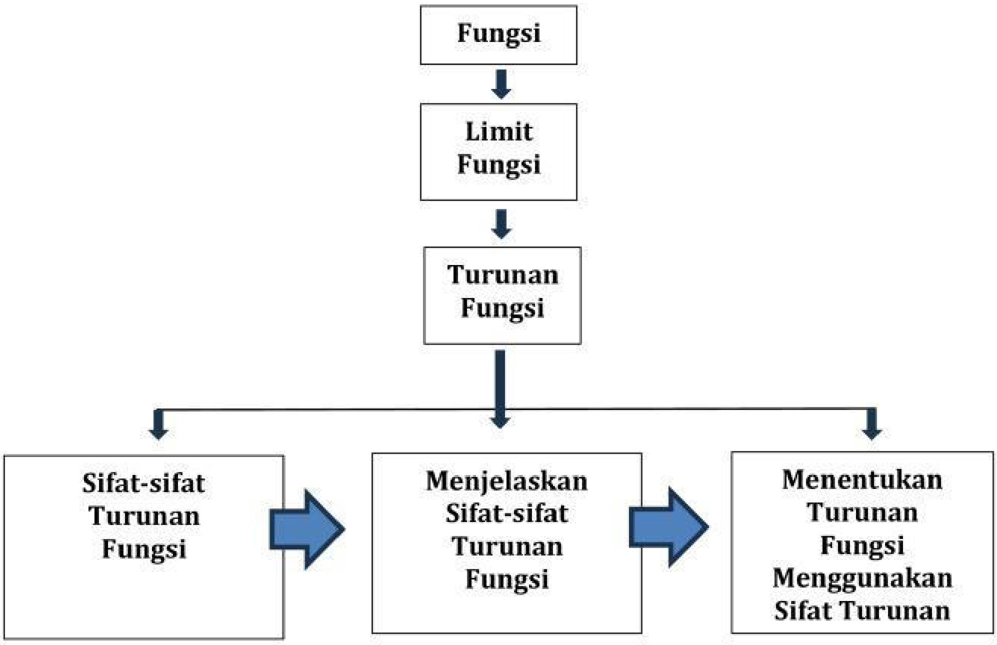
f'(x) :Turunan pertama dari fungsif(x)

Gradien : (bahasa Inggris: *gradient*) adalah salah satu operator dalam kalkulus vektor yang berguna untuk mencari perubahan arah dan kecepatan dalam bidang skalar, atau biasa disebut dengan kemiringan.

u(x) :Fungsi u

v(x) :Fungsi v

PETA KONSEP


Fungsi
Limit Fungsi
Turunan Fungsi
Sifat-sifat Turunan Fungsi
Menjelaskan Sifat-sifat Turunan Fungsi
Menentukan Turunan Fungsi Menggunakan Sifat Turunan

PENDAHULUAN

A. Identitas Modul

Mata Pelajaran	: Matematika
Kelas	: XI
Alokasi Waktu	: 10 JP
Judul Modul	: Turunan Fungsi Aljabar

B. Capaian Pembelajaran

Peserta didik dapat memahami laju perubahan dan laju perubahan rata-rata, serta laju perubahan sesaat sebagai konsep kunci derivatif (turunan), baik secara geometris maupun aljabar. Peserta didik dapat menentukan turunan dari fungsi polinomial, eksponensial, dan trigonometri, dan menerapkan derivatif (turunan) untuk membuat sketsa kurva, menghitung gradien dan menentukan persamaan garis singgung, menentukan kecepatan sesaat dan menyelesaikan soal optimasi.

C. Tujuan Pembelajaran

Peserta didik dapat

1. Menjelaskan sifat-sifat turunan fungsi aljabar dan menentukan turunan fungsi aljabar menggunakan definisi atau sifat- sifat turunan fungsi
2. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan turunan fungsi aljabar

D. Deskripsi Singkat Materi

Turunan adalah pengukuran terhadap bagaimana fungsi berubah seiring perubahan nilai yang dimasukan, atau secara umum turunan menunjukkan bagaimana suatu besaran berubah akibat perubahan besaran lainnya. Proses dalam menemukan turunan disebut diferensiasi.

Terdapat berbagai pemanfaatan turunan dalam kehidupan sehari-hari, yaitu:

- Salah satu penerapan turunan yang paling umum adalah penentuan nilai maksimum dan minimum. Hal tersebut dapat diamati dengan seberapa sering kita mendengar atau membaca istilah keuntungan terbesar, biaya terkecil, kekuatan terbesar, dan jarak terjauh. Nilai balik maksimum suatu fungsi pada domain f dapat berupa nilai maksimum mutlak atau nilai maksimum relatif. Begitupun dengan nilai minimum, dapat berupa nilai minimum mutlak dan nilai minimum relatif. Jika dalam interval tertentu terdapat dua nilai maksimum atau lebih, nilai maksimum mutlak (absolut) adalah nilai tertinggi sedangkan yang lainnya merupakan nilai maksimum relatif, begitupun sebaliknya. Jika terdapat dua atau lebih nilai minimum pada suatu fungsi, maka titik terendah merupakan nilai minimum mutlak (absolut), sedangkan yang lainnya merupakan nilai minimum relatif.

- Turunan dapat digunakan untuk menentukan kecepatan dan percepatan sehingga sering digunakan dalam pekerjaan dan penelitian yang membutuhkan ilmu fisika. Selain itu percepatan juga digunakan dalam menghitung laju percepatan pada kegiatan lempar lembing, lempar cakram, menembak, dan lain – lain. Setiap waktu dan percepatannya mempunyai nilai yang dapat diketahui melalui fungsi turunan.

- Dalam membuat konstruksi bangunan, percampuran bahan bahan bangunan yang di lakukan oleh arsitek, pembuatan tiang – tiang, langit langit, ruangan, dan lain lain menggunakan turunan sehingga bangunan terlihat cantik dan kokoh (optimal). Pembuatan kapal, pesawat, dan kendaraan lainnya menggunakan turunan.

- Dalam dunia penerbangan, turunan mempunyai fungsi terpenting untuk menentukkan laju pesawat dengan cepat. Pesawat akan mengikuti navigasi dari tower yang berada di bandara. Setiap laju pesawat akan terdeteksi pada navigasi (menggunakan perhitungan kalkulus otomatis) sehingga laju pesawat tidak salah arah dan percepatannya sesuai dengan panduan dari tower.

E. Petunjuk Penggunaan Modul

Sebelum Anda membaca isi modul, terlebih dahulu membaca petunjuk khusus dalam penggunaan modul agar memperoleh hasil yang optimal.

1. Sebaiknya mulai membaca dari pendahuluan, kegiatan pembelajaran, rangkuman, hingga daftar pustaka secara berurutan.
2. Setiap akhir kegiatan pembelajaran, Anda mengerjakan latihan soal dengan jujur tanpa melihat uraian materi.
3. Anda dikatakan tuntas apabila dalam mengerjakan latihan soal memperoleh nilai ≥ 75 sehingga dapat melanjutkan ke materi selanjutnya.
4. Jika Anda memperoleh nilai < 75 maka Anda harus mengulangi materi pada modul ini dan mengerjakan kembali latihan soal yang ada.

F. Materi Pembelajaran

Modul ini terbagi menjadi **2** kegiatan pembelajaran dan di dalamnya terdapat uraian materi, contoh soal, soal latihan dan soal evaluasi.

Pertama	:	Menemukan Konsep Turunan Sebagai Limit Fungsi
Kedua	:	Turunan Fungsi Aljabar

KEGIATAN PEMBELAJARAN 1

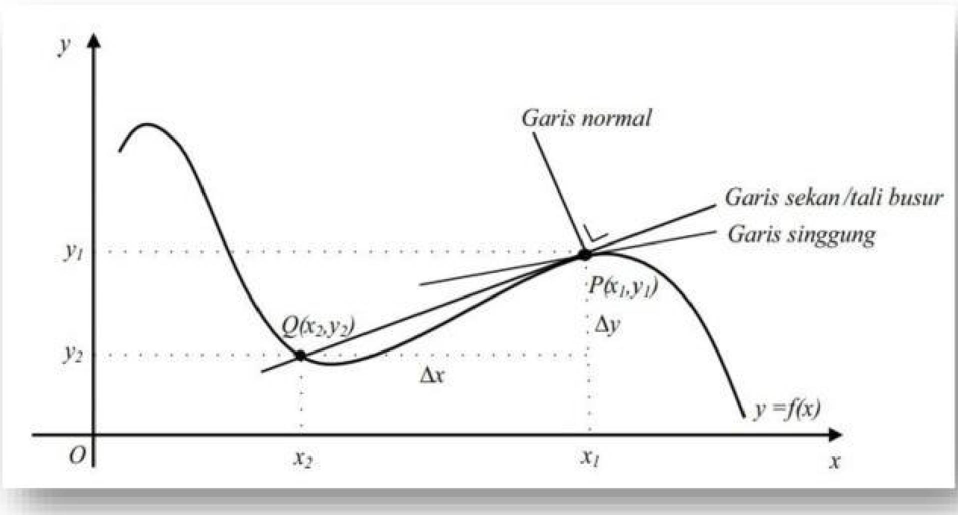
Menemukan Konsep Turunan

A. Tujuan Pembelajaran

Pada pembelajaran kali ini, Anda akan digiring untuk dapat menemukan konsep turunan secara mandiri. Selain itu juga Anda akan diajak untuk dapat menentukan turunan fungsi aljabar mulai dari yang paling sederhana sampai ke yang kompleks. Namun tidak usah khawatir, dalam modul ini Anda akan mempelajarinya secara bertahap untuk memungkinkan Anda dapat mempelajarinya secara mandiri.

B. Uraian Materi

Untuk menemukan konsep turunan, kita akan mencoba mengamati berbagai permasalahan nyata dan mempelajari beberapa kasus dan contohnya. Kita akan memulainya dengan menemukan konsep garis tangen atau garis singgung. Sebagai ilustrasi perhatikan berikut:

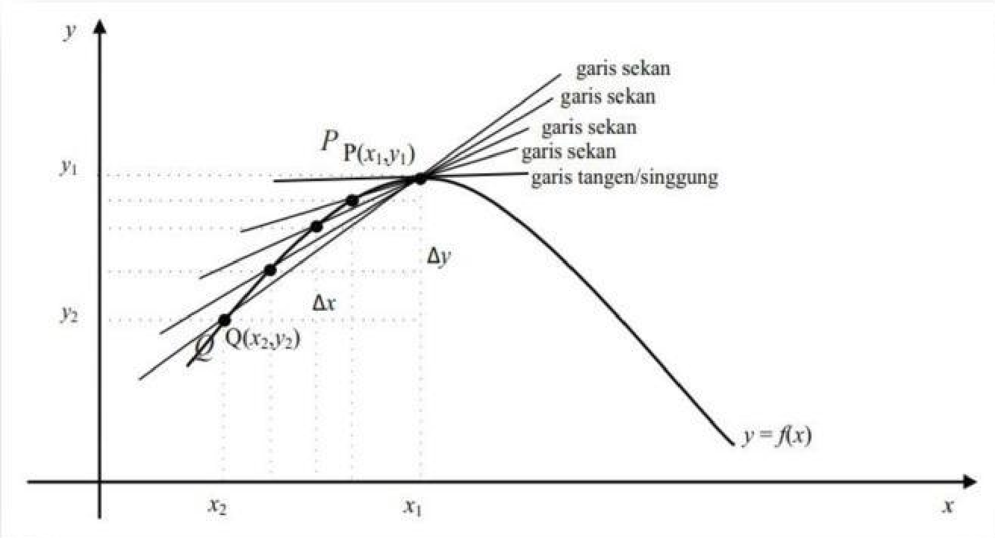


Gambar 1

Misalkan seseorang yang sedang bermain papan seluncur bergerak dari titik Q (x_2, y_2) dan melayang ke udara pada titik P(x_1 , y_1) sehingga ia bergerak dari titik Q mendekati titik P. Garis yang menghubungkan titik Q (x_2 , y_2) dan titik P (x_1 , y_1) disebut tali busur atau garis sekan dengan kemiringan atau gradien $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ (Ingat konsep garis lurus).

Jika $\Delta x = x_2 - x_1$ maka $x_2 = \Delta x + x_1$ (Δx merupakan selisih dari x) dan Jika $\Delta y = y_2 - y_1$ makan $y_2 = \Delta y + y_1$

Jika Δx semakin kecil maka Q akan bergerak mendekati P (Jika $\Delta x \to 0$ maka Q $\to$ P).
Sehingga gambar grafiknya dapat diilustrasikan sebagai berikut:



Gambar 2

Jika y = f(x) maka gradien garis sekan PQ adalah:

$$m_{PQ} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{x_1 + \Delta x - x_1} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Dari persamaan tersebut, kita dapat menarik definisi:

Misalkan $f : R \to R$ adalah fungsi kontinu dan titik P (x_1, y_1) dan $Q\ (x_1 + \Delta x, y_1 + \Delta y)$ pada kurva f. Garis sekan menghubungkan titik P dan Q dengan gradien $m_{sec} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$

Kita kembali ke gambar kedua yuk, Anda amati kembali bahwa jika titik Q mendekati P maka $\Delta x \to 0$ sehingga diperoleh garis singgung di titik P dengan gradien :

$m_{PGS} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$ jika limitnya ada, nahhh ini yang harus Anda pahami tentang teori limit. Dari perhitungan matematis ini kita dapatkan definisi kedua mengenai gradien garis singgung yaitu sebagai berikut:

Misalkan f adalah fungsi kontinu bernilai real dan titik $P(x_1, y_1)$ pada kurva f. Gradien garis singgung di titik $P(x_1, y_1)$ adalah limit gradien garis sekan di titik $P(x_1, y_1)$, ditulis: $m_{GS} = \lim_{\Delta x \to 0} m_{\sec} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$.
(Jika limitnya ada)

Contoh soal 1:

Tentukan gradien garis singgung kurva $f(x) = x^2 + 3x - 4$ di titik (2, 6)

Jawab :

$$f(x) = x^2 + 3x - 4$$

$$f(2) = 2^2 + 3\,(2) - 4 = 4 + 6 - 4 = 6$$

$$f(2 + \Delta x) = (2 + \Delta x)^2 + 3\,(2 + \Delta x) - 4$$

$$= 4 + 4\Delta x + \Delta x^2 + 6 + 3\Delta x - 4 = \Delta x^2 + 7\Delta x + 6$$

Menurut rumus : $m_{PGS} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$

$$m_{PGS} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x}$$

$$m_{PGS} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x^2 + 7\Delta x + 6 - 6}{\Delta x}$$

$$m_{PGS} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x^2 + 7\Delta x}{\Delta x}$$

$$m_{PGS} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x^2}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{7\Delta x}{\Delta x}$$

$$m_{PGS} = 0 + 7 = 7$$

Jadi gradien garis singgung kurva $f(x) = x^2 + 3x - 4$ di titik (2, 6) sama dengan 7.

Bagaimana? Bisakah Anda memahami bagaimana mencari gradien atau kemiringan suatu kurva dengan menggunakan konsep secan? Nahhh lanjut ke pelajaran berikutnya yaitu kita akan mengulas kembali persamaan garis singgung yang pernah Anda pelajari waktu SMP. Ingat kembali bahwa rumus mencari persamaan garis kurva $y = f(x)$ *di titik* (x_1, y_1) yaitu :

$$y - y_1 = m_{PGS}\,(x - x_1)$$

Contoh soal 2:

Tentukan persamaan garis singgung kurva $y = f(x) = x^2 + 4x\ di\ titik\ (-1\,, -3)$.

Jawab:

$f(x) = x^2 + 4x$

Langkah pertama kita cari dulu $f(-1) = (-1)^2 + 4(-1) = 1 - 4 = -3$

Kemudian cari $f(-1 + \Delta x) = (-1 + \Delta x)^2 + 4\,(-1 + \Delta x)$

$= (-1)^2 - 2\Delta x + \Delta x^2 - 4 + 4\Delta x = 1 - 2\Delta x + \Delta x^2 - 4 + 4\Delta x = \Delta x^2 + 2\Delta x - 3$

Maka di dapat :

$$m_{PGS} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(-1 + \Delta x) - f(-1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x^2 + 2\Delta x - 3 - (-3)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x^2 + 2\Delta x - 3 + 3}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x^2 + 2\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x^2}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\Delta x}{\Delta x} = 0 + 2 = 2$$

Didapat gradien kurva tersebut = 2

Maka Persamaan garis singgung kurva $y = f(x) = x^2 + 4x\ di\ titik\ (-1\,, -3)$. Adalah

$$\boldsymbol{y - y_1 = m_{PGS}\,(x - x_1)}$$
$$\boldsymbol{y - (-3) = 2\,(x - (-1))}$$
$$\boldsymbol{y + 3 = 2\,(x + 1)}$$
$$\boldsymbol{y + 3 = 2x + 2}$$
$$\boldsymbol{y = 2x + 2 - 3}$$
$$\boldsymbol{y = 2x - 1}$$

Atau bentuk lainnya

$$\boldsymbol{y - 2x + 1 = 0}$$

C. Rangkuman

a. Definisi untuk mencari gradien atau kemiringan garis singgung adalah

Misalkan f adalah fungsi kontinu bernilai real dan titik $P(x_1, y_1)$ pada kurva f. Gradien garis singgung di titik $P(x_1, y_1)$ adalah limit gradien garis sekan di titik $P(x_1, y_1)$, ditulis: $m_{GS} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} m_{\sec} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$.
(Jika limitnya ada)

b. Rumus untuk mencari persamaan garis singgung kurva

$$y - y_1 = m_{PGS}\,(x - x_1)$$

KEGIATAN PEMBELAJARAN 2
SIFAT-SIFAT TURUNAN

A. Tujuan Pembelajaran

Pada pembelajaran kedua, Anda akan dibimbing untuk dapat menggunakan sifat-sifat turunan yang telah Anda peroleh pada kegiatan pembelajaran satu. Cara menentukan turunan pertama sebuah fungsi yang terdefinisi di $\mathbb{R}$ Anda dapat menggunakan definisi turunan atau dapat juga menggunakan rumus umum turunan.

B. Uraian Materi

Konsep turunan merupakan salah satu dari bagian utama kalkulus. Konsep turunan ditemukan oleh **Sir Isaac Newton** (1642 – 1727) dan **Gottfried Wilhelm Leibniz** (1646 – 1716). Bahasa lain dari turunan adalah differensial yang merupakan tingkat perubahan dari suatu fungsi. Turunan dari fungsi $y = f(x)$ dituliskan dengan $y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{d(f(x))}{dx}$ (dibaca y aksen sama dengan f aksen x sama dengan $dy\ dx$ sama dengan $d\ f(x)\ dx$, ini dapat diartikan turunan pertama fungsi f terhadap x, atau turunan pertama y. Jika fungsinya dalam $a, f(a)$ maka $f'(a) merupakan\ turunan\ pertama\ f\ terhadap\ a$ dan seterusnya.

Definisi Turunan
Misal $f(x)$ merupakan fungsi yang terdefinisi di $\mathbb{R}$, turunan pertama dari fungsi tersebut didefinisikan sebagai limit dari perubahan rata-rata dari nilai fungsi terhadap variabel x dan ditulis sebagai:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Contoh Soal:

Dengan menggunakan konsep turunan, tentukan turunan pertama dari :

1. $f(x) = 10$

   Jawab:

   Karena $f(x) = 10$ merupakan fungsi konstan (tetap) maka $f\,(x + \Delta x) = 10\ (tetap)$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{10 - 10}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0$$

2. $f(x) = 3x + 5$

   Jawab:

$$f(x) = 3x + 5\ maka\ f(x + \Delta x) = 3\,(x + \Delta x) + 5 = 3x + 3\Delta x + 5$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3(x+\Delta x) + 5 - (3x+5)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x + 3\Delta x + 5 - 3x - 5}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 3 = 3$$

3. $f(x) = 5x^2 + 3$

   Jawab:

$$f(x + \Delta x) = 5\,(x + \Delta x)^2 + 3 = 5\,(x^2 + 2x.\Delta x + \Delta x^2) + 3$$
$$= 5x^2 + 10x.\Delta x + 5\Delta x^2 + 3$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{5x^2 + 10x.\Delta x + 5\Delta x^2 + 3 - (5x^2 + 3)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{5x^2 + 10x\Delta x + 5\Delta x^2 + 3 - 5x^2 - 3}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{10x.\Delta x + 5\Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{10x.\Delta x}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{5\Delta x^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} 10x + \lim_{\Delta x \to 0} 5\Delta x = 10x + 0 = 10x \end{aligned}$$

Sekarang marilah kita perhatikan ketiga contoh tersebut lalu kita tarik kesimpulan. Untuk contoh pertama, fungsi yang diberikan adalah fungsi konstan, menghasilkan turunan pertama sama dengan nol. Contoh soal kedua adalah fungsi linear menghasilkan turunan pertama koefisiennya, dan contoh soal ketiga adalah fungsi kuadrat, nahh perhatikan bahwa koefisien dari x pangkat dua adalah 5 dan pangkat dari x adalah 2, kalikan 5 dengan 2 didapat 5(2) = 10, hasil akhir berpangkat satu maka 2 – 1 = 1. Dari sini kita tarik kesimpulan bahwa:

➤ Untuk fungsi konstan mempunyai bentuk umum $\boldsymbol{f(x) = c}$, dengan c adalah konstanta bilangan Real.

$$\textbf{Jika } \boldsymbol{f(x) = c; maka\ f'(x) = 0}$$

➤ Untuk fungsi linear mempunyai bentuk umum $\boldsymbol{y = ax + b}$, dengan a dan b anggota bilangan Real.

$$\boldsymbol{Jika\ f(x) = ax + b\ maka\ f'(x) = a}$$

➤ Untuk fungsi kuadrat mempunyai bentuk umum $\boldsymbol{y = ax^n}$, dengan a anggota bilangan Real dan n pangkat/eksponen

$$\boldsymbol{Jika\ f(x) = ax^n\ maka\ f'(x) = ax^{n-1}}$$

Nahhh setelah Anda merumuskan rumus umum turunan seperti di atas, maka dapat Anda lihat untuk pengerjaan soal turunan dapat langsung menggunakan rumus tersebut.

Contoh. Tentukan turunan pertama dari

a) $y = 100$
   Jawab $y' = 0$
b) $y = 19x - 5$
   Jawab $y' = 19$
c) $y = 6x^3$
   Jawab : $y' = 6(3)^{3-1} = 18x^2$
d) $f(x) = 5\sqrt[3]{x^2}$
   Jawab: Untuk menjawab soal ini kita harus mengubah bentuk akar ke dalam bentuk pangkat pecahan.

$$f(x) = 5\sqrt[3]{x^2} = 5x^{\frac{2}{3}}$$

Jadi Anda punya koefisien = 5, pangkat = 2/3

$$\text{Maka } f'(x) = 5\left(\frac{2}{3}\right)x^{\frac{2}{3}-1}$$

$$f'(x) = \frac{10}{3}x^{\frac{2}{3}-\frac{3}{3}} = \frac{10}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{10}{3\sqrt[3]{x}}$$