$n \equiv \sum$ หลักคี่ $- \sum$ หลักคู่ $\pmod{11}$

Example 2.14. (Kvant M 676) Prove that for every positive integer n the sum of the digits of 1981^n is not less than 19.

Proof ให้ $1981^n = \overline{a_k a_{k-1} \cdots a_1}$

จาก $1981 \equiv 1 \pmod 9 \rightarrow 1981^n \equiv 1 \pmod 9$

$\rightarrow \sum_{i=1}^{k} a_i \equiv 1 \pmod 9$

ทำให้ $\sum_{i=1}^{k} a_i = 1, 10, 19, \ldots$

แต่จาก 1981^n ลงท้ายด้วยเลข 1 ดังนั้น $\sum_{i=1}^{k} a_i > 1$

สมมติให้ $\sum_{i=1}^{k} a_i = 10$ ให้ $S_1 = \sum_{i \text{ คี่}} a_i$

$S_2 = \sum_{i \text{ คู่}} a_i$

ดังนั้น $S_1 + S_2 = 10$ —① $\rightarrow S_2 = 10 - S_1$

จาก $1981 \equiv 9+1-8-1 = 1 \pmod{11}$

ดังนั้น $1981^n \equiv 1 \equiv S_2 - S_1 \pmod{11}$

จะได้ว่า $S_2 - S_1 = 1, 12, 23, \ldots$

แต่จาก $S_1, S_2 > 0$ ดังนั้น $10 > S_2 - S_1$

ดังนั้น $\underbrace{S_2 - S_1 = 1}_{①}$ และ $\underbrace{S_2 + S_1 = 10}_{②}$

① + ②; $2S_2 = 11$ ขัดแย้งกับ $S_1, S_2 \in \mathbb{N}$

$\therefore$ ผลบวกเลขโดดของ $1981^n \geq 19$ #