

En esta actividad debes completar los pasos de cada integración teniendo en cuenta el método indicado para cada ejercicio.

1. Método: **SUSTITUCIÓN TRIGONOMÉTRICA**

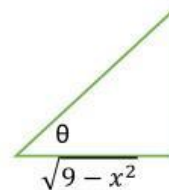
Tabla de sustituciones trigonométricas

Expresión	Sustitución	Identidad
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a \sin \theta, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$	$1 - \sin^2 \theta = \cos^2 \theta$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = a \tan \theta, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$	$1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a \sec \theta, \quad 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \text{ o } \pi \leq \theta < \frac{3\pi}{2}$	$\sec^2 \theta - 1 = \tan^2 \theta$

$$\int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} dx$$

$$x = 3 \sin \theta \quad \text{recuerda que } \sin \theta = \frac{\text{op}}{\text{hip}} = \frac{x}{3}$$

$$dx = 3 \cos \theta \quad \theta$$



Ahora trabajaremos con la raíz cuadrada

$$\sqrt{9-x^2} = \sqrt{9 - \sin^2 \theta} = \sqrt{9(1 - \sin^2 \theta)} = \sqrt{9 \cos^2 \theta} = 3 \cos \theta$$

Volvemos a la integral y reemplazamos las sustituciones planteadas:

$$\int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} dx = \int \frac{\cos \theta d\theta}{3 \cos \theta} = \int \frac{1}{3} d\theta = \frac{\theta}{3} + C$$

Para hallar el ángulo $\sin \theta = \frac{x}{3}$, por lo tanto $\theta = \sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)$

Entonces,

$$\int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} dx = \sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + C$$

2. Método : **SUSTITUCIÓN.**

$$\int \frac{1}{x \ln x} dx = \int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln x} dx \quad u = \ln x \quad du = \frac{1}{x} dx$$

Sustituimos y obtenemos:

$$\int \frac{1}{u} du = \ln(u) + C = \ln(\ln(x)) + C$$

3. Método: **FRACCIONES PARCIALES**

$$\int \frac{x}{x^4 + 6x^2 + 8} dx$$

Empezamos observando que es una fracción propia entonces factorizamos el denominador para establecer el caso que debemos utilizar.

$$x^4 + 6x^2 + 8 = (x^2 + 4)(x^2 + 2)$$

Entonces podemos escribir la fracción inicial como la suma de fracciones más simples,

$$\frac{x}{x^4 + 6x^2 + 8} = \frac{Ax + B}{x^2 + 4} + \frac{Cx + D}{x^2 + 2}$$

$$\frac{x}{x^4 + 6x^2 + 8} = \frac{(Ax + B)(x^2 + 2) + (Cx + D)(x^2 + 4)}{(x^2 + 4)(x^2 + 2)}$$

$$x = Ax^3 + Bx^2 + Cx^3 + Dx^2 + 2Ax + 4Cx + 2B + 4D$$

De aquí obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$x^3(A + C) = 0 \quad x^2(B + D) = 0 \quad x(A + C) = 0 \quad B + D = 1$$

Resolviendo los sistemas de ecuaciones obtenemos los siguientes valores:

$$A = -\frac{1}{4} \quad B = \frac{1}{4} \quad C = -\frac{1}{2} \quad D = \frac{1}{2}$$

Al sustituir en la integral obtenemos:

$$\int \frac{x}{x^4 + 6x^2 + 8} dx = \int \left(\frac{-\frac{1}{4}x}{x^2 + 4} + \frac{\frac{1}{4}x}{x^2 + 2} \right) dx$$

$$= -\frac{1}{4} \int \frac{x}{x^2 + 4} dx + \frac{1}{4} \int \frac{x}{x^2 + 2} dx$$

$$= -\frac{1}{8} \ln(x^2 + 4) + \frac{1}{4} \ln(x^2 + 2) + C$$