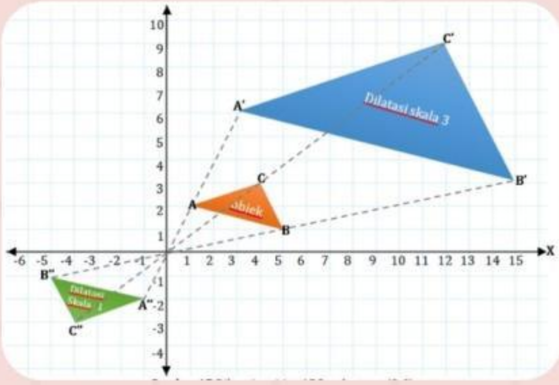
4. DILASTASI (PERKALIAN)



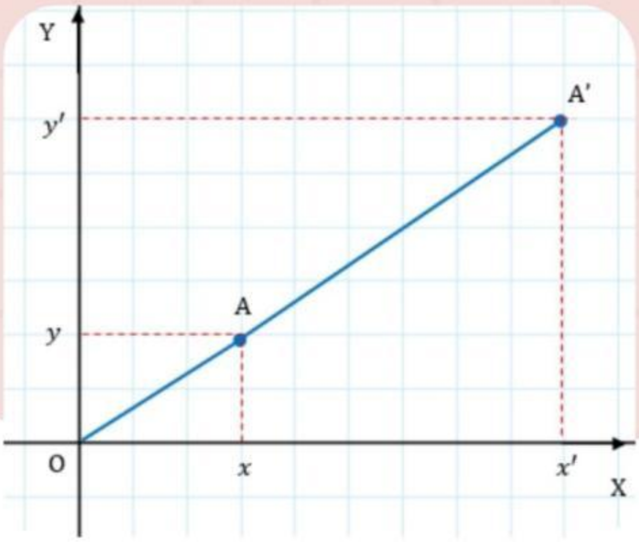
Dilatasi adalah transformasi yang mengubah jarak titik–titik dengan faktor pengali tertentu terhadap suatu titik tertentu. Faktor pengali tertentu disebut faktor dilatasi atau faktor skala dan titik tertentu disebut pusat dilatasi

Bangun yang diperbesar atau diperkecil (dilatasi) dengan skala k dapat mengubah ukuran atau tetap ukurannya tetapi tidak mengubah bentuk.

- Jika $k > 1$ maka bangun akan diperbesar dan terletak searah terhadap sudat dilatasi dengan bangun semula .
- Jika $k = 1$ maka bangun tidak mengalami perubahan ukuran dan letak.
- Jika $0 < k < 1$ maka bangun akan diperkecil dan terletak searah terhadap pusat dilatasi dengan bangun semula..
- Jika $-1 < k < 0$ maka bangun akan diperkecil dan terletak berlawanan arah terhadap pusat dilatasi dengan bangun semula.
- Jika $k = -1$ maka bangun tidak akan mengalami perubahan bentuk dan ukuran dan terletak berlawanan arah terhadap pusat dilatasi dengan bangun semula.
- Jika $k < -1$ maka bangun akan diperbesar dan terletak berlawanan arah terhadap pusat dilatasi dengan bangun semula.

DILATASI TERHADAP TITIK PUSAT $(0, 0)$

Bentuk dilatasi terhadap titik pusat $O(0, 0)$ dapat diamati pada gambar 18. Titik $A(x, y)$ didilatasikan dengan faktor skala k terhadap titik pusat $O(0, 0)$ menghasilkan titik $A'(x', y')$.



Dilatasi titik A pada gambar 18 dapat dituliskan sebagai berikut.

$$A(x, y) \xrightarrow{D_{[O,k]}} A'(x', y')$$

Titik (x, y) dirotasikan sebesar α terhadap titik pusat (a, b) menghasilkan bayangan titik (x', y') dengan aturan

$$\boxed{\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}$$

Contoh 1

Tentukan bayangan titik $A(2, 4)$ setelah didilatasikan terhadap pusat $O(0,0)$ dan faktor skala 3 !

Pembahasan:

Titik A (2, 4) akan didilatasikan oleh $D[O,3]$ dapat ditulis

$$A(2,4) \xrightarrow{D_{[O,3]}} A'(x',y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Jadi, bayangan titik A setelah didilatasi oleh $D[O,3]$ adalah $A'(6, 12)$

Contoh 2

Garis g : $2x + 4y - 3 = 0$ didilatasikan dengan faktor skala -2 terhadap titik pusat (0, 0). Persamaan garis g setelah didilatasi adalah ...

Pembahasan:

Misalkan titik $A(x, y)$ memenuhi persamaan garis g: $2x + 4y - 3 = 0$

$$A(x,y) \xrightarrow{D_{[O,-2]}} A'(x',y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \end{pmatrix}$$

Berdasarkan kesamaan dua matriks diperoleh

$x' = -2x \rightarrow x = -1/2\,x'$

$y' = -2y' \rightarrow y = -1/2\,y'$

Substitusi $x = -1/2\,x'$ dan $y = -1/2\,y'$ ke persamaan garis g: $2x + 4y - 3 = 0$ sehingga diperoleh

$2x + 4y - 3 = 0$

$2(-1/2\,x') + 4(-1/2\,y') - 3 = 0$

$-x' - 2y' - 3 = 0$

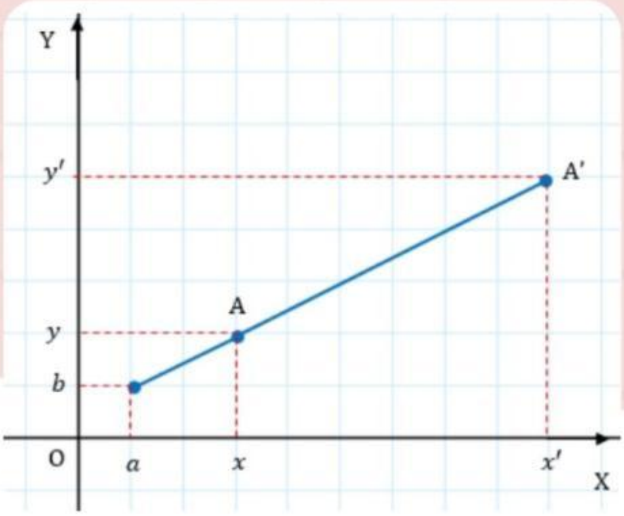
$x' + 2y' + 3 = 0$

$x + 2y + 3 = 0$

Jadi, persamaan garis g setelah didilatasi adalah g': $x + 2y + 3 = 0$

DILATASI TERHADAP TITIK PUSAT (a, b)

Bentuk dilatasi terhadap titik pusat $P(a, b)$ dapat diamati pada gambar 19. Titik $A(x, y)$ didilatasikan dengan faktor skala k terhadap titik pusat $P(a, b)$menghasilkan titik $A'(x', y')$.



Dilatasi titik A pada gambar 19 dapat dituliskan sebagai berikut

$$A(x, y) \xrightarrow{D_{[(a,b),k]}} A'(x', y')$$

Titik (x, y) didilatasikan dengan faktor skala k terhadap titik pusat (a, b) menghasilkan bayangan titik (x', y') dalam persamaan matriks dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\boxed{\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}$$

Contoh 1

Tentukan bayangan titik $A(-5, 2)$ setelah didilatasikan terhadap pusat $(3, 4)$ dan faktor skala -3 !

Pembahasan:

Titik $A(-5, 2)$ akan didilatasikan oleh $D[(3,4),-3]$ dapat ditulis

$$A(-5,2) \xrightarrow{D_{[(3,4),-3]}} A'(x',y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5-3 \\ 2-4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -8 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24+3 \\ 6+4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Jadi, bayangan titik A setelah didilatasi oleh $D[(3,4),-3]$ adalah $A'(27, 10)$

Contoh 2

Garis g : $2x + 4y - 3 = 0$ didilatasikan dengan faktor skala -2 terhadap titik pusat $(2, -4)$. Persamaan garis g setelah didilatasi adalah ...

Pembahasan:

Misalkan titik $A(x, y)$ memenuhi persamaan garis g: $2x + 4y - 3 = 0$

$$A(x,y) \xrightarrow{D_{[(2,-4),-2]}} A'(x',y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-2 \\ y-(-4) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-2 \\ y+4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2(x-2) \\ -2(y+4) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x+4 \\ -2y-8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x+4+2 \\ -2y-8+(-4) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x+6 \\ -2y-12 \end{pmatrix}$$

Berdasarkan kesamaan dua matriks diperoleh

$$x' = -2x + 6$$
$$2x = 6 - x'$$
$$x = \frac{6 - x'}{2}$$
$$y' = -2y - 12$$
$$2y = -y' - 12$$
$$y = \frac{-y - 12}{2}$$

Substitusi $x = \frac{6-x'}{2}$ dan $y = \frac{-y-12}{2}$ ke persamaan garis $g: 2x + 4y - 3 = 0$ sehingga diperoleh

$$2x + 4y - 3 = 0$$
$$2\left(\frac{6 - x'}{2}\right) + 4\left(\frac{-y - 12}{2}\right) - 3 = 0$$
$$6 - x' + 2(-y' - 12) - 3 = 0$$
$$6 - x' - 2y' - 24 - 3 = 0$$
$$-x' - 2y' - 21 = 0$$
$$x' + 2y' + 21 = 0$$
$$x + 2y + 21 = 0$$

LATIHAN