E-MODUL

TRANSFORMASI GEOMETRI

KELAS XI
SEMESTER 1

AIFA AINI SOEWANDI

MATEMATIKA
UNIVERSITAS KATOLIK PARAHYANGAN
BANDUNG

PANDUAN PENGGUNAAN E-MODUL

Akses Video Pembelajaran

E-modul ini menyediakan video singkat berbahasa Inggris yang bersumber dari YouTube untuk membantu siswa memahami materi transformasi geometri dengan lebih mudah. Video yang menarik dan efektif ini membantu siswa agar dapat mengikuti pembelajaran dengan baik.

Akses “Try Now” GeoGebra

Siswa dapat menggunakan GeoGebra untuk melihat transformasi geometri secara interaktif. Dengan ini, konsep materi menjadi lebih mudah dipahami melalui visualisasi langsung.

Definisi “Did You Know?”

Bagian "Did You Know?" menyajikan fakta menarik seputar transformasi geometri. Informasi ini bertujuan menambah pengetahuan siswa yang membuat pembelajaran lebih menyenangkan.

Definisi “Let’s Think!”

Bagian "Let's Think" menyajikan pertanyaan “open-ended” yang mendorong siswa berpikir kritis. Pertanyaan ini dirancang untuk membantu mengasah kemampuan pemecahan masalah matematis siswa.

TRANSFORMASI GEOMETRI

Tujuan Pembelajaran

- Menganalisis dan membandingkan transformasi dan komposisi transformasi dengan menggunakan matriks.
- Menyelesaikan masalah-masalah yang berkaitan dengan transformasi geometri (translasi, refleksi, dilatasi, dan rotasi).

MATERI POKOK

- Pengertian Transformasi Geometri
- Translasi (Pergeseran)
- Refleksi (Pencerminan)
- Rotasi (Perputaran)
- Dilatasi (Pembesaran/ pengecilan)

Karakter yang Dikembangkan

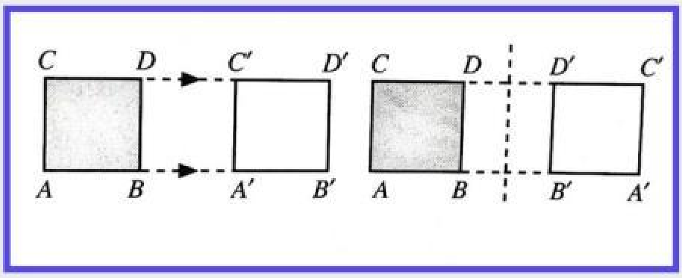
- Menghayati dan mengamalkan perilaku jujur, disiplin, tanggung jawab, dan peduli.
- Menunjukkan sikap sebagai bagian dari solusi atas berbagai permasalahan dalam berinteraksi secara efektif dengan lingkungan sosial alam.
- Mengembangkan sikap kritis, kreatif, dan logis dalam memecahkan masalah matematis melalui penerapan transformasi geometri secara mandiri.

I. PENGERTIAN TRANSFORMASI GEOMETRI

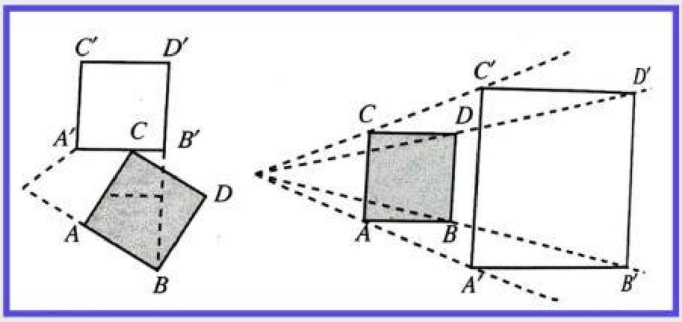
Pengertian

Suatu **transformasi geometri** bidang kartesius adalah suatu aturan yang mengaitkan setiap titik di bidang kartesius ke tepat satu titik di bidang kartesius yang disebut **bayangan** dari titik semula.

Transformasi geometri menyebabkan perubahan-perubahan yang dapat berupa perubahan letak maupun perubahan bentuk. Transformasi geometris yang akan dibahas meliputi **translasi** (pergeseran), **refleksi** (pencerminan), **rotasi** (perputaran), dan **dilatasi** (pembesaran/pengecilan).

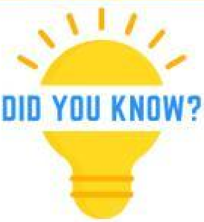


GAMBAR 1.1 Translasi dan refleksi



GAMBAR 1.2 Rotasi dan dilatasi

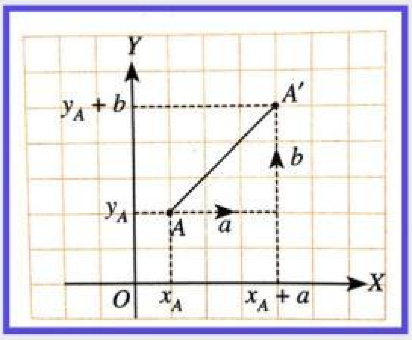
Klik di sini!



Bangunan-bangunan kuno seperti piramida Mesir dan kuil-kuil Yunani umumnya dirancang dengan memperhatikan simetri dan proporsi geometris. **Transformasi geometri** digunakan untuk menciptakan keseimbangan dan harmoni dalam desain bangunan tersebut.

II. TRANSLASI (PERGESERAN)

Translasi (pergeseran) merupakan transformasi geometri yang bersifat menggeser setiap titik dengan jarak dan arah yang tetap. Suatu translasi dicirikan oleh suatu **vektor translasi** $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ dengan a menyatakan jauhnya pergesaran horizontal dan b menyatakan jauhnya pergeseran vertikal.



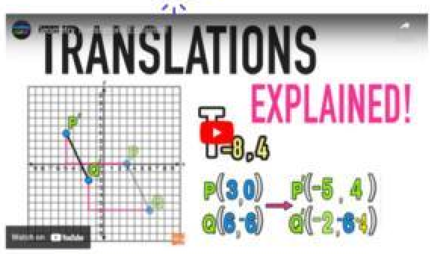
Gambar 2.1 Translasi titik

A. Translasi Titik

Secara umum, translasi sebuah titik dikerjakan dengan cara berikut ini.

Titik awal A	$A = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$	Mencari titik awal: $A = A' - T = \begin{pmatrix} x'_A - a \\ y'_A - b \end{pmatrix}$
Vektor translasi T	$T = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$	Mencari vektor translasi: $T = A - A' = \begin{pmatrix} x'_A - x_A \\ x'_B - x_B \end{pmatrix}$
Bayangan A'	$A' = \begin{pmatrix} x'_A \\ y'_A \end{pmatrix}$	Mencari bayangan: $A' = A + T = \begin{pmatrix} x_A + a \\ y_A + b \end{pmatrix}$

Klik di sini!



B. Translasi Kurva

Penentuan persamaan bayangan/peta dari suatu kurva dapat dilakukan dengan memperhatikan bahwa

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

sehingga

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x' - a \\ y' - b \end{pmatrix}.$$

Bayangan suatu kurva **y=f(x)** setelah ditranslasikan oleh vektor T = $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ ditentukan dengan cara menyubstitusikan **x = x'-a** dan **y = y'-b** ke persamaan kurva **y=f(x)**, sehingga diperoleh

y'-b = f(x'-a).

Hal ini berarti persamaan bayangan kurva y=f(x) akibat translasi oleh vektor T = $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ adalah

y-b = f(x-a).

Contoh Soal

Segitiga ABC dengan titik-titik **A=(0,2)**, **B=(1,3)**, dan **C=(4,1)** ditranslasi oleh vektor $T = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Tentukan bayangan A'B'C' dari segitiga ABC!

Pembahasan:

Perhatikan bahwa

$$A' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+2 \\ 2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$B' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 \\ 3+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix},$$

$$C' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+2 \\ 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Jadi, A'=(2,3), B'=(3,4), dan C'=(6,2).

LET'S THINK!

Bagaimana jika salah satu atau kedua komponen vektor T bernilai negatif? Hitung dan identifikasilah perbedaan hasilnya dengan hasil di atas.

II. TRANSLASI (PERGESERAN)

Untuk menentukan persamaan kurva awal yang jika ditranslasikan oleh vektor T = $\binom{a}{b}$ menghasilkan bayangan dengan persamaan **y'=f(x')**, perhatikan kembali bahwa

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+a \\ y+b \end{pmatrix},$$

sehingga diperoleh **x'=x+a** dan **y'=y+b.** Nilai-nilai ini disubstitusikan ke persamaan bayangan sehingga diperoleh persamaan kurva awal

y+b = f(x+a).

Contoh Soal

Tentukan bayangan garis **x+2y = 5** oleh translasi $\binom{-2}{3}$.

Pembahasan:

Perhatikan bahwa

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ sehingga } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'+2 \\ y'-3 \end{pmatrix}.$$

Hal ini berarti terjadi proses substitusi **x=x'+2** dan **y=y'-3** ke garis **x+2y=4**, sehingga diperoleh bayangannya

x'+ 2 + 2y'- 6 = 4,

yaitu

x'+ 2y'- 8 = 0.

LET'S THINK!

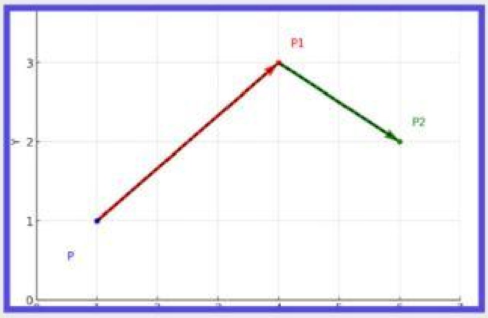
Bagaimana jika garis x+2y=5 ditranslasi oleh $\binom{a}{b}$? Tentukan bayangan garis tersebut untuk beberapa nilai a dan b, kemudian jelaskan perbedaan dari hasil translasi untuk nilai-nilai a dan b yang berbeda!

C. Komposisi dua translasi berurutan

Komposisi dua translasi berurutan dapat dilakukan dengan cara:

a. menyusun vektor-vektor translasi sehingga ujung vektor translasi pertama berimpit dengan pangkal vektor translasi kedua (Gambar 2.2),

b. menjumlahkan vektor-vektor translasi komponen demi komponen.



Gambar 2.2 Dua tranlasi berurutan

Komposisi dua translasi "T_1 dilanjutkan dengan T_2" sering ditulis sebagai $T_2 \circ T_1$ (baca: T_2 noktah T_1). Translasi T_1 oleh vektor $\binom{6}{-2}$ dilanjutkan translasi T_2 oleh vektor $\binom{-2}{6}$ adalah translasi $T_2 \circ T_1$ oleh vektor

$$\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

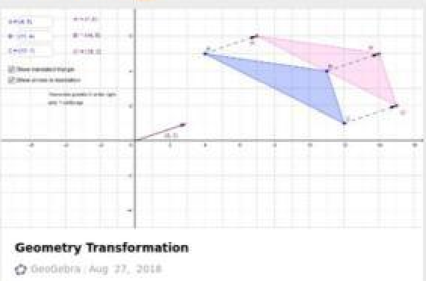
Dengan demikian, bayangan dari (-1,2) terhadap $T_2 \circ T_1$ dapat dihitung sebagai berikut:

$$(T_2 \circ T_1)\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+4 \\ 2+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Jadi, bayangan dari (-1,2) terhadap $T_2 \circ T_1$ adalah (3,6).

Catatan: $(T_2 \circ T_1)(a, b)$ berarti $T_2[T_1(a, b)]$.

TRY NOW



Contoh Soal

Diketahui translasi-translasi T_1 dan T_2 yang diwakili oleh vektor-vektor $\binom{3}{0}$ dan $\binom{1}{2}$. Tentukan $T_1(-3,1)$ dan $(T_2 \circ T_1)(-3,1)$.

Pembahasan:

$T_1(-3,1) = (-3+3, 1+0) = (0,1)$

$(T_2 \circ T_1)(-3,1) = T_2(T_1(-3,1)) = T_2(0,1) = (0+1, 1+2) = (1,3)$

LET'S THINK!

Apa yang akan terjadi jika kedua vektor translasi memiliki satu atau lebih komponen negatif? Hitunglah kemudian identifikasilah perbedaannya dengan jawaban di atas.

III. REFLEKSI (PENCERMINAN)

Refleksi (pencerminan) terhadap suatu garis k merupakan transformasi geometri yang memetakan setiap titik **A=(x,y)** di salah satu sisi dari garis k ke titik **A'=(x',y')** di sisi lain dari garis k sehingga segmen AA' memotong tegak lurus garis k di titik P dengan **AP=PA'**.

- **Refleksi terhadap sumbu x:**

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \text{ sehingga } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

- **Refleksi terhadap sumbu y:**

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \text{ sehingga } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

- **Refleksi terhadap garis y = x:**

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \text{ sehingga } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

- **Refleksi terhadap garis y = -x:**

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \text{ sehingga } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

- **Refleksi terhadap garis x = h:**

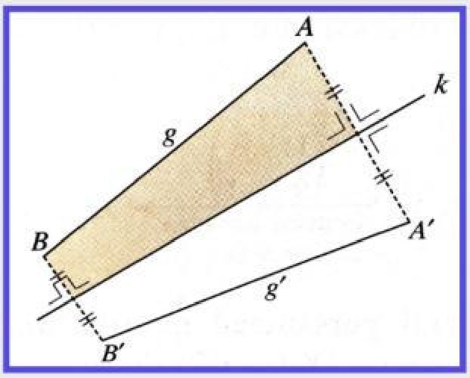
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2h \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ sehingga } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x' - 2h \\ y' \end{pmatrix}.$$

- **Refleksi terhadap garis y = k:**

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2k \end{pmatrix}, \text{ sehingga } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' - 2k \end{pmatrix}.$$

- **Refleksi terhadap titik asal O=(0,0):**

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \text{ sehingga } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$



Gambar 3.1

Klik di sini!

Contoh Soal

Segitiga ABC dengan titik-titik sudut **A=(1,2)**, **B=(3,5)**, dan **C=(6,4)** dicerminkan terhadap sumbu x. Bayangan segitiga A'B'C' yang diperoleh memiliki titik-titik sudut ...

Pembahasan:

Perhatikan bahwa

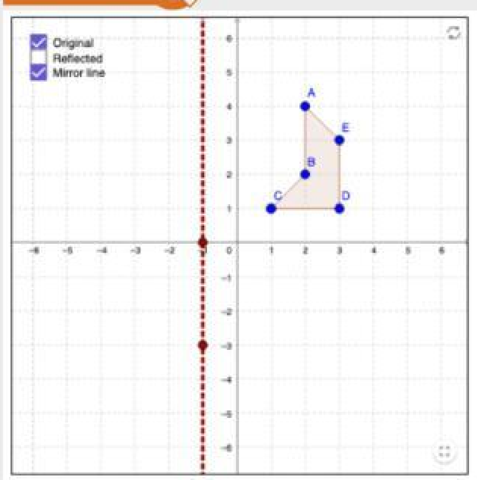
$$A' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 \\ 0+(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$B' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+0 \\ 0+(-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix},$$

$$C' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6+0 \\ 0+(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Jadi, titik-titik sudut bayangannya adalah A'=(1,-2), B'=(3,-5), dan C'=(6,-4).

TRY NOW



LET'S THINK!

Bagaimana jika segitiga tersebut dicerminkan terhadap garis-garis lain seperti yang sudah disebutkan di atas? Identifikasilah perbedaannya!

IV. ROTASI (PERPUTARAN)

Suatu **rotasi (perputaran)** ditentukan oleh tiga unsur penting, yaitu **titik pusat rotasi**, **besar sudut rotasi**, dan **arah rotasi**. Besar sudut rotasi (putaran) dapat dinyatakan dalam satuan derajat maupun radian.

Arah rotasi dapat berlawanan arah jarum jam maupun searah jarum jam. Untuk rotasi **berlawanan arah jarum jam**, sudut rotasinya bernilai **positif**, sedangkan untuk rotasi **searah jarum jam**, sudut rotasinya bernilai **negatif**.

A. Rotasi terhadap Pusat O=(0,0) sejauh θ

Gambar 4.1 menunjukkan bahwa titik $A=(x_A,y_A)$ dirotasi berlawanan arah jarum jam sejauh θ terhadap titik pusat O=(0,0), hingga diperoleh bayangan $A'=(x'_A,y'_A)$. Perhatikan bahwa $x_A=r\cos\alpha$ dan $y_A=r\sin\alpha$, di mana α adalah sudut yang diukur dari sumbu x positif ke segmen OA. Hal ini berarti:

$$\begin{aligned} x'_A &= r\cos(\alpha+\theta) \\ &= r\cos\alpha\cos\theta - r\sin\alpha\sin\theta \\ &= \cos\theta - y_A\sin\theta \end{aligned}$$

dan

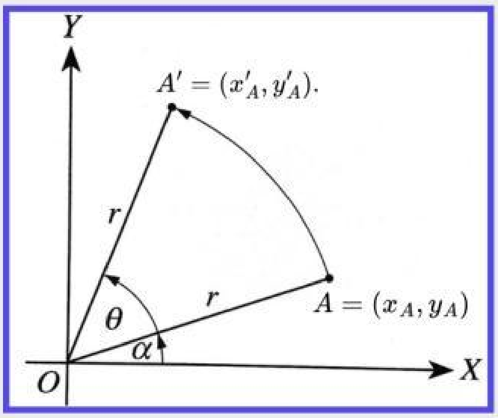
$$\begin{aligned} y'_A &= r\sin(\alpha+\theta) \\ &= r\sin\alpha\cos\theta + r\cos\alpha\sin\theta \\ &= y_A\cos\theta + x_A\sin\theta \\ &= x_A\sin\theta + y_A\cos\theta. \end{aligned}$$

Berdasarkan kedua persamaan di atas, diperoleh persamaan matriks

$$\begin{pmatrix} x'_A \\ y'_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$$

Secara umum, dituliskan

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}}_{\text{bayangan}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}_{\text{matriks rotasi}} \overbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}^{\text{titik awal}}$$



Gambar 4.1 **Rotasi terhadap titik pusat O**

Contoh Soal

Tentukan bayangan titik **A=(4,10)** karena rotasi berlawanan arah jarum jam sejauh 90°.

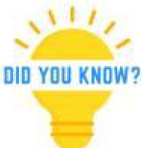
Pembahasan:

Perhatikan bahwa

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(90^\circ) & -\sin(90^\circ) \\ \sin(90^\circ) & \cos(90^\circ) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Jadi, bayangannya adalah A'=(-10,4).



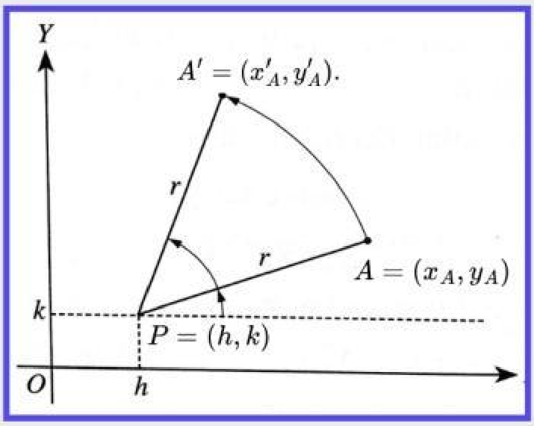
Ketika kita naik eskalator, kita mengalami **translasi**. Seluruh tubuh kita bergerak ke atas atau ke bawah tanpa mengubah orientasi tubuh

LET'S THINK!

Bagaimana jika titik A dirotasi dengan sudut -90° dan 270° ? Hitung dan identifikasilah hasilnya. Kemudian, pilihlah sudut rotasi yang memberikan hasil yang sama dengan rotasi terhadap sudut 270°.

IV. ROTASI (PERPUTARAN)

B. Rotasi terhadap Pusat P=(h,k) sejauh θ



Gambar 4.2 Rotasi terhadap titik pusat P

Titik $A = (x_A, y_A)$ diputar sejauh θ berlawanan arah jarum jam terhadap pusat P=(h,k) sehingga diperoleh bayangan $A' = (x'_A, y'_A)$. Serupa dengan rotasi terhadap pusat titik asal, diperoleh sistem persamaan

$$x'_A - h = \cos\theta(x_A - h) - \sin\theta(y_A - h),$$
$$y'_A - k = \sin\theta(x_A - h) - \cos\theta(y_A - k).$$

Sistem persamaan di atas ditulis dalam bentuk matriks

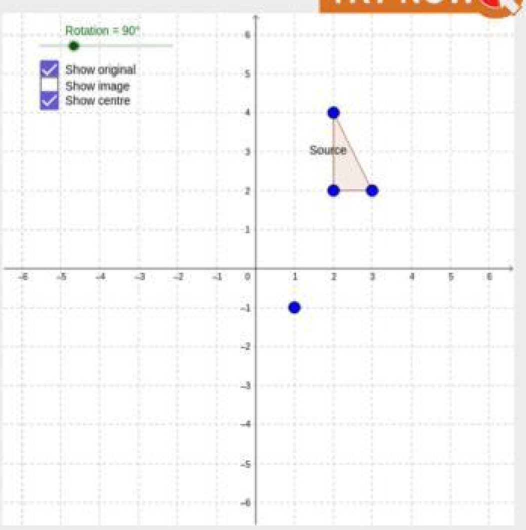
$$\begin{pmatrix} x'_A - h \\ y'_A - k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_A - h \\ y_A - k \end{pmatrix}.$$

Secara umum, dapat ditulis

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - h \\ y - k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}.$$

Klik di sini!

TRY NOW



Contoh Soal

Tentukan bayangan titik **A=(-3,2)** karena rotasi dengan pusat **(2,1)** berlawanan arah jarum jam sejauh 90°.

Pembahasan:

Perhatikan bahwa

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(90^\circ) & -\sin(90^\circ) \\ \sin(90^\circ) & \cos(90^\circ) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3-2 \\ 2-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Jadi, bayangannya adalah A'=(1,-3).

LET'S THINK!

Bagaimana jika titik A dirotasi dengan sudut -90° dan 270°? Hitung dan identifikasilah hasilnya. Kemudian, pilihlah sudut rotasi yang memberikan hasil yang sama dengan rotasi dengan sudut 270°.

V. DILATASI (PEMBESARAN/PENGECILAN)

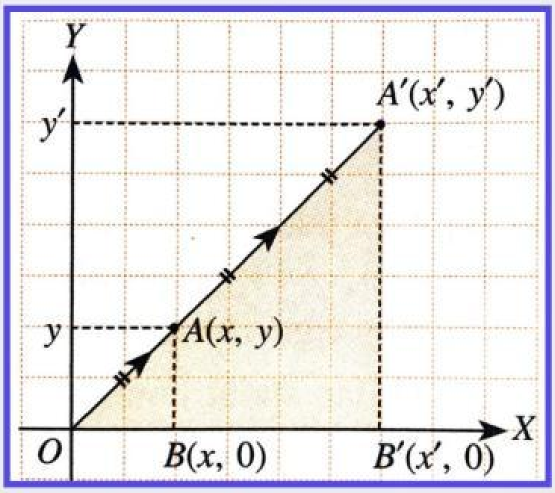
Dilatasi (pembesaran/pengecilan) merupakan transformasi yang mengubah ukuran (memperbesar atau memperkecil) sebuah bangun geometris tanpa mengubah bentuknya. Bangun semula bersifat sebangun dengan bangun hasil dilatasi.

Proses dilatasi sebuah bangun geometri dilakukan terhadap suatu titik pusat dilatasi dan suatu faktor skala dilatasi $k>0$.

Klik di sini!

A. Dilatasi dengan pusat O=(0,0) dan Faktor Skala k

Perhatikan **Gambar 5.1**. Misalkan titik **A=(x,y)** didilatasi terhadap pusat O=(0,0) dengan faktor skala *k* sehingga diperoleh bayangan titik **A'=(x',y')**.



Gambar 5.1 Dilatasi dengan pusat O

Pada gambar terlihat bahwa ΔAOB sebangun dengan $\Delta A'OB'$.

Hal ini berarti

$$\frac{OB}{OB'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{OA}{OA'} = \frac{1}{k},$$

yaitu

$$\frac{OB'}{OB} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{OA'}{OA} = \frac{k}{1}. \qquad \cdots(1)$$

Dari kesamaan (1), diperoleh

$$OB' = k \cdot OB, \text{ sehingga } \quad x' = k \cdot x = k \cdot x + 0 \cdot y,$$

$$A'B' = k \cdot AB, \text{ sehingga } \quad y' = k \cdot y = 0 \cdot x + k \cdot y.$$

Dalam bentuk matriks, diperoleh

titik awal

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}}_{\text{bayangan}} = \underbrace{\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}}_{\text{matriks dilatasi}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Contoh Soal

Tentukan bayangan persegi panjang ABCD dengan **A=(1,1)**, **B=(5,1)**, **C=(5,4)**, dan **D=(1,4)** yang didilatasi terhadap titik pusat **O=(0,0)** dengan faktor skala 2.

Pembahasan:

Perhatikan bahwa

$$A' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$B' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$C' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix},$$

$$D' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Jadi, bayangannya adalah A'=(4,6).

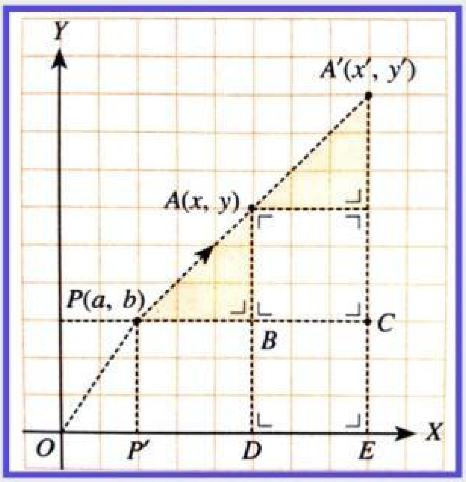
LET'S THINK!

Apa perbedaan antara hasil dilatasi dengan faktor skala lebih dari 1 dan hasil dilatasi dengan faktor skala kurang dari 1? Jelaskan jawabanmu!

V. DILATASI (PEMBESARAN/PENGECILAN)

B. Dilatasi dengan Pusat P=(a,b) dan Faktor Skala k>0

Perhatikan **Gambar 5.2**. Titik **A=(x,y)** didilatasi terhadap pusat **P=(a,b)** dengan faktor skala *k* sehingga diperoleh bayangan titik **A′=(x′,y′)**.



Gambar 5.2 Dilatasi dengan pusat P

Jarak-jarak horizontal

$$\begin{aligned} PB &= P'D = x-a, \\ PC &= P'E = k\cdot P'D \\ &= k(x-a), \\ OE &= OP' + P'E \\ &= a + k(x-a), \\ \therefore x' &= a+k(x-a). \end{aligned}$$

Jarak-jarak vertikal

$$\begin{aligned} AB &= y-b, \\ A'C &= k\cdot AB \\ &= k(y-b), \\ A'E &= PP' + A'C \\ &= b + k(y-b), \\ \therefore y' &= b+k(y-b). \end{aligned}$$

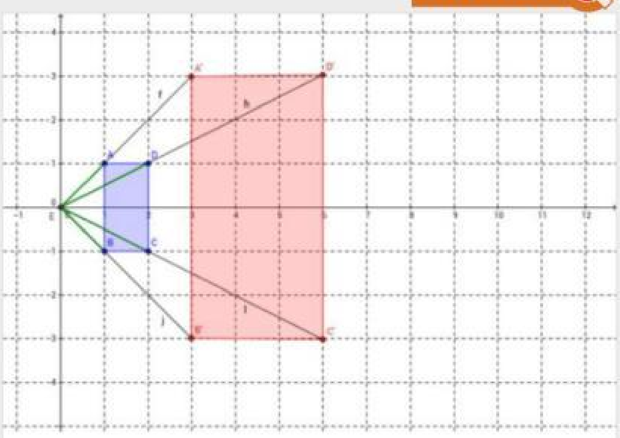
Kedua persamaan di atas dapat disusun sebagai

$$\begin{cases} x'-a = k(x-a) = k(x-a) + 0\cdot(y-b), \\ y'-b = k(y-b) = 0\cdot(x-a)+k(y-b). \end{cases}$$

Dalam bentuk matriks,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

TRY NOW



Dilations
GeoGebra

Contoh Soal

Persegi ABCD dengan titik-titik **A=(3,1)**, **B=(3,4)**, **C=(6,4)**, dan **D=(6,1)** didilatasi terhadap pusat **P=(2,1)** dengan faktor skala 2. Tentukan titik-titik sudut bayangan persegi ABCD!

Pembahasan:

Perhatikan bahwa

$$A' = \begin{pmatrix} x'_A \\ y'_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3-2 \\ 1-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$B' = \begin{pmatrix} x'_B \\ y'_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3-2 \\ 4-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix},$$

$$C' = \begin{pmatrix} x'_C \\ y'_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6-2 \\ 4-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \end{pmatrix},$$

$$D' = \begin{pmatrix} x'_D \\ y'_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6-2 \\ 1-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Jadi, titik-titik sudut bayangannya adalah A′=(4,1), B=(3,8), C′=(10,7), dan D′=(10,1).

LET'S THINK!

Apa perbedaan antara hasil dilatasi dengan faktor skala lebih dari 1 dan hasil dilatasi dengan faktor skala kurang dari 1? Jelaskan jawabanmu!