L K P D

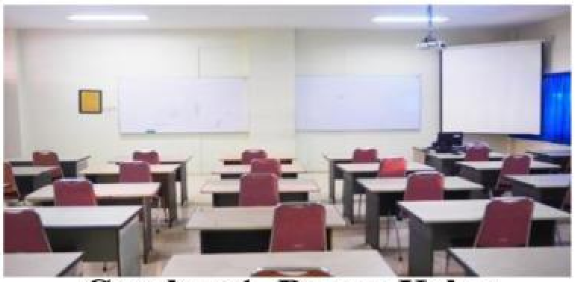
Matriks

SMA Kelas XI

BAHAN BACAAN MATRIKS

A Konsep Matriks

Coba kalian perhatikan susunan benda-benda yang ada di sekitar! Pernahkah kalian memperhatikan denah ruang kelasmu? Ada berapa baris meja siswa? Ada berapa kolom meja siswa?



Gambar 1. Ruang Kelas

Tentu kalian dapat melihat susunan tersebut berupa pola baris dan kolom, bukan? Sebagai contoh lainnya adalah susunan angka dalam bentuk tabel. Pada tabel terdapat baris dan kolom, banyaknya baris dan kolom bergantung pada ukuran table tersebut. Agar kalian dapat menemukan konsepnya, mari perhatikan gambaran dari permasalahan berikut.

Mari Bereksplorasi

Seorang wisatawan local hendak berlibur ke beberapa tempat wisata yang ada di Pulau Jawa. Untuk memaksimalkan waktu liburan, dia mencatat jarak antara kota-kota tersebut sebagai berikut.

Bandung – Semarang 367 km
Semarang – Yogyakarta 115 km
Bandung – Yogyakarta 428 km

Dapatkah kamu membuat susunan jarak antar kota tujuan wisata tersebut jika wisatawan tersebut memulai perjalanan dari Bandung! Sajikan data tersebut ke dalam tabel 1, kemudian berikan makna setiap angka dalam susunan tersebut.

Tabel 1. Data Jarak Antar Kota Tujuan Wisata

Kota	Bandung	Semarang	Yogyakarta
Bandung	0	367	428
Semarang	367	0	115
Yogyakarta	428	115	0

Sajikan data pada Tabel 1 dalam bentuk baris dan kolom dengan menghilangkan judul baris dan kolom ke dalam bentuk berikut.

$$A = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} A = \begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}, \text{atau } A = \begin{Vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{Vmatrix}$$

Susunan jarak antarkota di Pulau Jawa ini terdiri dari 3 baris dan 3 kolom dan disebut dengan matriks.

Secara umum matriks dapat didefinisikan sebagai berikut.

Matriks adalah susunan bilangan yang disusun dalam suatu jajaran berbentuk persegi panjang yang terdiri atas baris dan kolom. Kelompok bilangan tersebut ditulis di dalam kurung biasa "( )", kurung siku "[ ]", atau "‖ ‖". Namun, pada umumnya, matriks dituliskan dengan menggunakan kurung siku "[ ]".

Penamaan suatu matriks dilambangkan dengan huruf kapital, seperti A, B, C, … , dan seterusnya. Bilangan yang menyusun matriks dinamakan elemen matriks yang biasanya dinotasikan dengan huruf kecil sesuai dengan nama matriksnya.

Maka, secara umum matriks dapat ditulis sebagai berikut.

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow Baris\ ke-1 \\ \rightarrow Baris\ ke-2 \\ \rightarrow Baris\ ke-3 \\ \\ \rightarrow Baris\ ke-m \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ Kolom\ ke-1 & Kolom\ ke-2 & Kolom\ ke-3 & & Kolom\ ke-n \end{array}$$

Dimana:

$A_{m\times n}$: Matriks A berordo (ukuran) $m \times n$ dengan m menyatakan banyak baris matriks A dan n menyatakan banyak kolom matriks A. Bilangan m dan n adalah bilangan asli.

a_{ij} : Menyatakan elemen matriks pada baris ke-i dan kolom ke-j dengan $i = 1,2,3, \dots, m$ dan $j = 1,2,3, \dots, n$.

B Jenis - Jenis Matriks

Berikut merupakan jenis-jenis matriks.

1. Matriks Baris

   Matriks baris adalah matriks yang hanya mempunyai satu baris saja. Matriks baris berordo $1 \times n$, dengan n adalah jumlah kolom.

   Contoh : $A_{1\times 6} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 & 2 & 9 & 3 \end{bmatrix}$, matriks berordo 1×6.

   $B_{1\times 3} = \begin{bmatrix} -3 & 7 & -1 \end{bmatrix}$, matriks berordo 1×3.

   Jumlah elemen pada matriks baris sama dengan jumlah kolomnya

2. Matriks Kolom

   Matriks kolom adalah matriks yang hanya mempunyai satu kolom saja. Matriks kolom berordo $m \times 1$, dengan m adalah jumlah baris.

   Contoh : $A_{4\times 1} = \begin{bmatrix} 4 \\ -9 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, matriks berordo 4×1.

   $B_{3\times 1} = \begin{bmatrix} -2 \\ -5 \\ 6 \end{bmatrix}$, matriks berordo 3×1.

   Jumlah elemen pada matriks kolom sama dengan jumlah barisnya

3. Matriks Persegi

   Matriks persegi adalah matriks yang mempunyai banyak baris dan kolom yang sama. Matriks ini memiliki ordo $m \times n$ dengan nilai $m = n$.

Contoh : $A_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$, matriks persegi berordo 2×2.

$D_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 6 \\ 11 & 17 & 27 \\ 21 & 12 & 19 \end{bmatrix}$, matriks persegi berordo 3×3.

Tinjaulah matriks persegi berordo $n \times n$ di bawah ini.

$$A_{n\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

→ Diagonal Samping matriks *A*

→ Diagonal Utama matriks *A*

Dalam matriks persegi, elemen yang terletak pada garis hubung elemen a_{11} dengan elemen a_{nn} disebut dengan diagonal utama matriks, sedangkan elemen yang terletak pada garis hubung elemen a_{1n} dengan elemen a_{n1} disebut dengan diagonal samping.

4. Matriks Datar dan Matriks Tegak

Matriks datar adalah matriks yang berordo $m \times n$ dengan nilai $m < n$, ini berarti banyak kolom lebih banyak dibandingkan dengan banyak baris. Karena kolomnya lebih banyak dibandingkan dengan barisnya, maka susunan elemen-elemennya akan memanjang atau mendatar.

Contoh : $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 11 & 7 \end{bmatrix}$, matriks datar yang berordo 2×3

Jika nilai $m > n$ maka banyak baris lebih banyak dibandingkan dengan banyak kolom, sehingga susunan elemen-elemennya tegak. Matriks yang berciri demikian disebut sebagai matriks tegak.

Contoh : $A = \begin{bmatrix} 7 & 11 \\ 3 & -4 \\ -7 & 4 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}$, matriks tegak yang berordo 4×2

Matriks datar dan matriks tegak biasa disebut matriks persegi panjang.

5. Matriks Segitiga

Matriks segitiga terbagi menjadi 2, yaitu :

a. Matriks segitiga atas adalah matriks yang elemen-elemen di bawah diagonal utama semuanya bernilai nol.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 7 & 12 \\ 0 & 5 & -8 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 13 \end{bmatrix}$$

b. Matriks segitiga bawah adalah matriks yang elemen-elemen di atas diagonal utama semuanya bernilai nol.

$$B = \begin{bmatrix} 13 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & 10 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

6. Matriks Diagonal

Suatu matriks persegi dikatakan sebagai matriks diagonal jika elemen yang ada di bawah dan di atas diagonal utamanya bernilai nol atau dengan kata lain elemen selain diagonal utamanya bernilai nol.

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

7. Matriks Identitas

Suatu matriks dikatakan sebagai matriks identitas jika semua elemen yang terletak pada diagonal utamanya bernilai satu.

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

8. Matriks Nol

Suatu matriks dikatakan sebagai matriks nol jika semuanya bernilai nol.

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

9. Matriks Simetris

Matriks simetris adalah matriks persegi dengan elemen-elemen yang letaknya simetris terhadap diagonal utama bernilai sama. Dengan kata lain, elemen a_{ij} sama dengan elemen a_{ji} dengan $i \neq j$.

Contoh: $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 7 \\ 5 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 7 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

10. Matriks Transpos

Matriks transpos adalah matriks baru yang diperoleh dengan cara menukar elemen-elemen pada baris menjadi kolom dan sebaliknya elemen-elemen pada kolom menjadi baris. Matriks transpos A dinotasikan dengan A^T atau A^t.

Contoh :

Jika $D = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ merupakan matriks kolom, maka transpos matriks D adalah matriks baris $D^t = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}$

Jika $E = \begin{bmatrix} -7 & 8 & 1 & 3 \\ 5 & 9 & 7 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -6 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ merupakan matriks persegi, maka transpos matriks E adalah $E^t = \begin{bmatrix} -7 & 5 & 2 & 1 \\ 8 & 9 & 2 & -6 \\ 1 & 7 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ yang juga merupakan matriks persegi.

C Kesamaan Dua Matriks

Matriks A dan matriks B dikatakan sama ($A = B$) jika dan hanya jika:

(i) Ordo matriks A sama dengan ordo matriks B

(ii) Semua elemen-elemen yang seletak pada matriks A dan matriks B mempunyai nilai yang sama, $a_{ij} = b_{ij}$ (untuk semua nilai i dan j)

Contoh :

$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3x & 2y \end{pmatrix}$ $dan\ B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 9 & 14 \end{pmatrix}$ Tentukan nilai x dan y!

Penyelesaian :

Matriks A dan matriks B sama-sama berordo 2×2, sehingga ordo matriks A = ordo matriks B. Ini berarti syarat perlu bagi kesamaan dua matriks telah terpenuhi.

Syarat cukup bagi kesamaan matriks A dan matriks B adalah yang seletak harus bernilai sama, sehingga diperoleh hubungan :

$$3x = 9 \leftrightarrow x = 3$$

$$2y = 14 \leftrightarrow y = 7$$

Jadi, jika A = B maka nilai $x = 3$ dan nilai $y = 7$.

D Penjumlahan dan Pengurangan Antarmatriks

Penjumlahan dan Pengurangan Antarmatriks

a) Penjumlahan Matriks

Jika matriks A dan B adalah matriks-matriks yang berordo $m \times n$ dengan elemen-elemen a_{ij} dan b_{ij}, maka ada matriks C yang merupakan hasil penjumlahan matriks A dengan matriks B atau $C = A + B$. Matriks C juga berordo $m \times n$ dengan elemen-elemen $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ (untuk semua i dan j).

Sifat-Sifat Penjumlahan Matriks

Misalkan matriks A, B, C, dan O merupakan matriks-matriks yang berordo sama, maka dalam penjumlahan matriks

(1) Bersifat Komutatif : $A + B = B + A$

(2) Bersifat Asosiatif : $(A + B) + C = A + (B + C)$

(3) Terdapat sebuah matriks identitas yaitu matriks O yang bersifat

$$A + O = O + A = A$$

(4) Matriks A mempunyai lawan yaitu $-A$ yang bersifat $A + (-A) = O$

b) Pengurangan Matriks

Jika matriks A dan B adalah matriks-matriks yang berordo $m \times n$ maka pengurangan matriks A dengan matriks B didefinisikan sebagai jumlah antara matriks A dengan lawan dari matriks B. Ditulis sebagai berikut.

$$A - B = A + (-B)$$

Definsi pengurangan matriks dapat pula dituliskan sebagai berikut.

Jika matriks A dan B adalah matriks-matriks yang berordo $m \times n$ dengan elemen-elemen a_{ij} dan b_{ij}, maka ada matriks C yang merupakan hasil pengurangan dari matriks A dengan matriks B atau $C = A - B$. Matriks C juga berordo $m \times n$ dengan elemen-elemen $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$ (untuk semua i dan j).

Sifat-sifat operasi penjumlahan matriks tidak berlaku pada operasi pengurangan matriks.

E Perkalian Matriks

a) Perkalian Matriks dengan Skalar

Jika matriks A adalah matriks yang berordo $m \times n$ dan k adalah bilangan real (k sering disebut skalar), maka kA menyatakan matriks yang diperoleh dengan mengalihkan setiap elemen pada matriks A dengan k.

Sifat-Sifat Perkalian Matriks dengan Skalar

Misalkan matriks A dan B merupakan matriks-matriks yang berordo sama, serta k dan h merupakan skalar, maka memenuhi ketentuan berikut.

$kO = O$, dengan O adalah matriks nol

$kA = O$, untuk $k = 0$

Bersifat Asosiatif : $h(kA) = (hk)A$
Bersifat Distributif : $(h \pm k)A = hA \pm kA$
Bersifat Distributif : $k(A \pm B) = (kA) \pm (kB)$

b) Perkalian Dua Matriks

Jika matriks A adalah matriks berordo $m \times n$ dan B adalah matriks berordo $n \times p$ maka ada matriks C yang merupakan hasil perkalian matriks A dengan matriks B atau $C = AB$. Matriks C berordo $m \times p$ dan elemen-elemen c_{ij} dihitung dengan cara mengalihkan elemen baris ke-i pada matriks A terhadap elemen kolom ke-j pada matriks B, kemudian ditambahkan hasilnya.

$$c_{ij} = a_{i1}.\, b_{1j} + a_{i2}.\, b_{2j} + a_{i3}.\, b_{3j} + \ldots + a_{in}.\, b_{nj}$$

Sifat-Sifat Perkalian Dua Matriks

Misalkan matriks A, B, C, dan I merupakan matriks-matriks yang berordo sama, I merupakan matriks identitas, maka memenuhi ketentuan berikut.
Bersifat Asosiatif : $(AB)C = A(BC)$
Identitas : $AI = IA = A$
Distributif : $A(B \pm C) = AB \pm AC$ atau $(A \pm B)C = AC \pm BC$

LEMBAR KERJA SISWA 1 (LKS 1)
Konsep Matriks

Nama :
Kelas : XI
Kelompok :
Alokasi Waktu : 100 Menit

<u>Kegiatan 1 (Konsep Matriks)</u>

Daging hewan ayam, bebek, kambing, dan sapi merupakan sumber protein yang baik. Selain itu, daging hewan tersebut juga mengandung lemak dan menghasilkan kalori. Berdasarkan eatjoy.co.id, setiap 100 gram daging ayam mengandung lemak 25g; protein 18,2g; dan kalori 302 kal. Daging bebek mengandung lemak 28,6g; protein 16g, dan kalori 326 kal. Daging kambing mengandung protein dan lemak masing-masing 9,2g serta kalori 154 kal. Daging sapi mengandung protein dan lemak masing-masing 14g serta kalori 207 kal. Sajikan data tersebut ke dalam tabel!

Jika data pada tabel hanya dituliskan susunan bilangannya saja dalam bentuk matriks yang ditulis di dalam kurung biasa “( )”, kurung siku “[ ]”, atau “‖ ‖”, maka akan diperoleh

Menurut pemahaman kalian, berapa banyak kolom dan baris dari matriks di atas? Apa yang dapat kalian simpulkan mengenai pengertian dari matriks? Tuliskan sesuai dengan hasil diskusi kelompokmu.

<u>Kegiatan 2 (Jenis-Jenis Matriks)</u>

Apakah matriks di bawah ini memiliki satu jenis matriks? Jika iya, sebutkan jenis matriksnya dan alasan kalian memilih jenis matriks tersebut!

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -7 & 6 \\ -8 & 5 & 4 \\ 5 & 10 & 3 \end{bmatrix}$$

Dari beberapa jenis-jenis matriks, sebutkan 3 jenis matriks yang kalian ketahui dan berikan contohnya!

Transpos Matriks

Kedisiplinan kehadiran dari peserta didik merupakan hal penting untuk kesuksesan kegiatan belajar mengajar. Berikut ini disajikan data absensi siswa pada kelas XI 1 selama satu semester.

Tabel 1.1 Data absensi siswa kelas XI 1 selama satu semester

	Sakit	Ijin	Tanpa Keterangan
Andi	4	2	5
Beni	2	2	2
Cica	2	3	0
Dini	3	4	3

Jika data direpresentasikan ke dalam bentuk matriks akan diperoleh:

Kemudian seseorang menuliskan data absensi siswa namun diubah dalam bentuk sebagai berikut.

Tabel 1.2 Data absensi siswa kelas XI 1 selama satu semester

	Andi	Beni	Cica	Dini
Sakit	4	2	2	3
Ijin	2	2	3	4
Tanpa Keterangan	5	2	0	3

Berdasarkan tabel di atas, jika data disajikan dalam bentuk matriks, maka akan diperoleh:

Dengan memperhatikan bentuk dari kedua matriks tersebut, apa yang dapat kalian simpulkan?

Kerjakan soal berikut ini!

Jika $A = \begin{bmatrix} 15 & 5 \\ 30 & 25 \end{bmatrix}$, maka transpos matriks $A^t = \ldots\ldots.$

Jika $P = \begin{bmatrix} 10 & 20 & 14 \\ 18 & 12 & 8 \\ 22 & 6 & 17 \end{bmatrix}$, maka transpos matriks P, adalah $P^t = \ldots\ldots.$

<u>Kegiatan 3 (Kesamaan Dua Matriks)</u>

Pada waktu perjalanan berwisata, dua orang mahasiswa mencari informasi harga kue di dua toko di tempat yang berbeda. Ana dan Lili menyajikan data harga kue dalam bentuk tabel berikut.

Tabel 1.3 Data Harga Kue di Toko A

Harga / Ukuran Kue	Harga		
	Bika Ambon	Lapis Legit	Bolu Pandan
Kotak Besar	44000	71000	53000
Kotak Sedang	38000	52000	43000
Kotak Kecil	33000	45000	38000

Tabel 1.4 Data Harga Kue di Toko B

Harga / Ukuran Kue	Harga		
	Bika Ambon	Lapis Legit	Bolu Pandan
Kotak Besar	44000	71000	53000
Kotak Sedang	38000	52000	43000
Kotak Kecil	33000	45000	38000

Tuliskan informasi yang kamu peroleh ke dalam bentuk matriks.

Amati kedua matriks tersebut. Menurut pendapat kalian apakah kedua matriks tersebut sama? Bagaimana keterkaitan antara kedua matriks tersebut? Berikanlah simpulan berdasarkan pengamatanmu!

Perhatikan matriks berikut ini!

$$\begin{bmatrix} \dots & 4+1 \\ 7 & \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{9} & 5 \\ \dots & 3^2 \end{bmatrix}$$

Tentukan nilai *a, b, c,* dan *d* yang memenuhi matriks $P^t = Q$, dengan

$P = \begin{bmatrix} 2a-4 & 3b \\ d+2a & 2c \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$ dan $Q = \begin{bmatrix} b-5 & 3a-c & 4 \\ 3 & 6 & 7 \end{bmatrix}$

Penyelesaian:

Karena P^t merupakan transpos matriks P, maka $P^t = \begin{bmatrix} \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \end{bmatrix}$

Maka kesamaan $P^t = Q$ dapat ditulis $\begin{bmatrix} \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b-5 & 3a-c & 4 \\ 3 & 6 & 7 \end{bmatrix}$