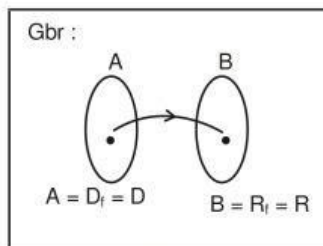


BAB 2

FUNGSI, FUNGSI KOMPOSISI DAN FUNGSI INVERS

A. FUNGSI

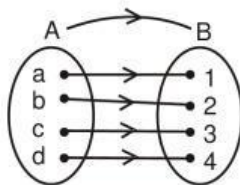
Definisi: Fungsi dari himpunan A ke himpunan B adalah suatu relasi sedemikian hingga setiap anggota himpunan A dipasangkan dengan tepat satu anggota himpunan B.



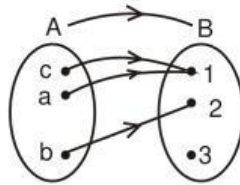
Gbr. 1

Fungsi sebagai pasangan berurutan dua bilangan real x dan y adalah himpunan (x, y) dengan x paling banyak muncul satu kali dalam setiap pemetaan.

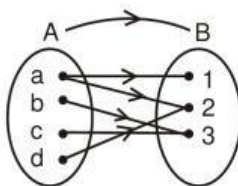
Contoh :



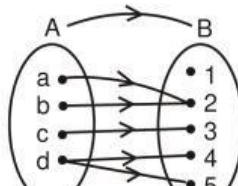
(i)



(ii)



(iii)



(iv)

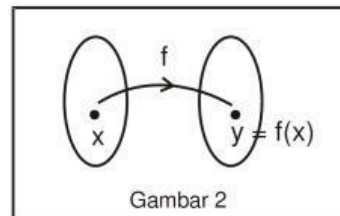
Dari keempat contoh di atas manakah yang merupakan fungsi dari $A \rightarrow B$?

Pada contoh (i) Domain = $\{a, b, c, d\}$ dan Range = $\{1, 2, 3, 4\}$

Pada contoh (ii) Domain = $\{a, b, c\}$
Range = $\{1, 2\}$
Kodomain = $\{1, 2, 3\}$

Dimana $R \leq K$ dengan domain adalah daerah asal, Range adalah daerah hasil dan B adalah Kodomain.

Notasi fungsi dengan variabel x dapat ditulis $f(x)$ atau $f : x \rightarrow y$



Gambar 2

Menentukan Domain Alami Suatu Fungsi

Contoh :

1) $f(x) = x + 3$

$D_f = ?$ Jelas $D_f = \{x \mid x \in \mathbb{R}\}$

2) $f(x) = x^2 + 3x + 5$

$D_f = ?$ Jelas $D_f = \{x \mid x \in \mathbb{R}\}$

3) $f(x) = \frac{3x}{x+1}$,

$D_f = ?$

Karena penyebut tidak boleh sama dengan nol. Maka $x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$

Jadi $D_f = \{x \mid x \neq -1, x \in \mathbb{R}\}$

4) $f(x) = \sqrt{3x+5}$

$D_f = ?$

Jelas didalam akar tidak boleh negatif tapi boleh sama dengan nol.

Maka $3x + 5 \geq 0, x \geq -\frac{5}{3}$

Jadi $D_f = \{x \mid x \geq -\frac{5}{3}, x \in \mathbb{R}\}$

5) $f(x) = \frac{x}{x^2 + x - 6}$

Jelas $x^2 + x - 6 \neq 0$

$(x + 3)(x - 2) \neq 0$

$x + 3 \neq 0$ atau $x - 2 \neq 0$

$x \neq -3$ atau $x \neq 2$

$D_f = \{x \mid x \neq -3 \text{ atau } x \neq 2, x \in \mathbb{R}\}$

$$6) f(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2 + x - 6}}$$

Jelas penyebut tidak boleh sama dengan nol dan harus positif jadi :

$$x^2 + x - 6 > 0$$

$$(x + 3)(x - 2) > 0$$

$$x = -3 \vee x = 2$$

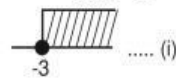


Jadi $D_f = \{x \mid x < -3 \text{ atau } x > 2, x \in \mathbb{R}\}$

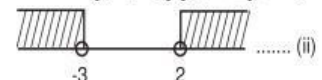
$$7) f(x) = \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x^2 + x - 6}}$$

D_f :

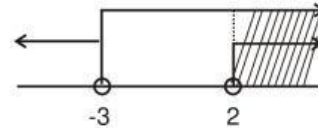
$$\text{i) } x + 3 \geq 0 \\ x \geq -3$$



$$\text{dan ii) } x^2 + x - 6 > 0 \\ (x + 3)(x - 2) > 0$$



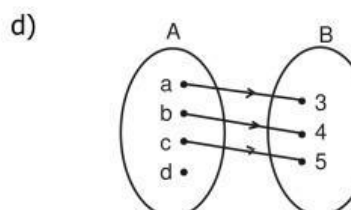
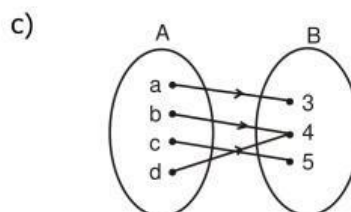
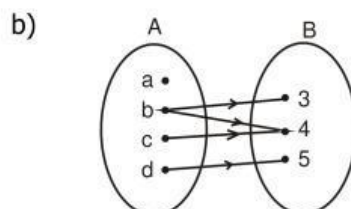
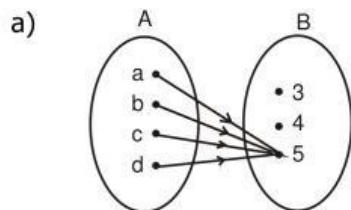
Dari (i) $\cap$ (ii)



Jadi $D_f = \{x \mid x > 2, x \in \mathbb{R}\}$

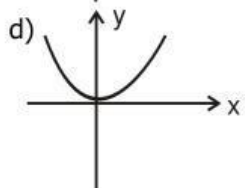
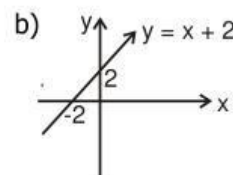
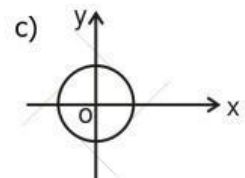
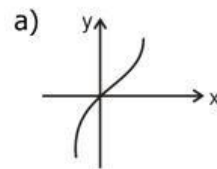
Uji Kompetensi 1

1. Relasi – relasi dari himpunan $A = \{a, b, c, d\}$ dan $B = \{3, 4, 5\}$ relasi manakah yang merupakan pemetaan ?



2. Dari relasi-relasi di atas, tuliskan dalam bentuk pasangan berurutan, dan apa yang dapat kalian simpulkan.

3. Grafik-grafik manakah yang merupakan fungsi



4. Tentukan Domain alami fungsi-fungsi berikut :

a) $f(x) = x^2 + 4x - 3$

b) $f(x) = \frac{3x}{4x - 1}$

c) $f(x) = \frac{3x^2 + 2x - 5}{(x - 1)}$

d) $f(x) = \sqrt{3x + 8}$

e) $f(x) = \frac{3x + 5}{x - 3}$

f) $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x - 5}$

g) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 4x - 5}}{\sqrt{3x - 5}}$

h) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 4x - 5}}{3x - 5}$

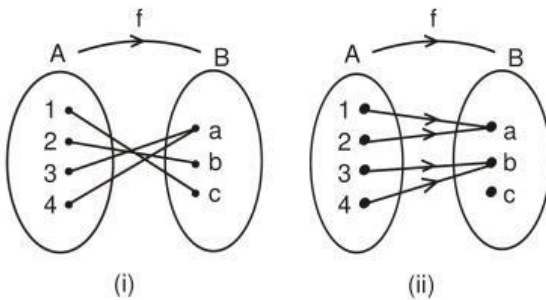
i) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 2x - 3}}{\sqrt{x^2 + 4x - 5}}$

Sifat - Sifat Fungsi

1) Fungsi bersifat SURJEKTIF (ONTO)

$f : A \rightarrow B$ surjektif jika untuk setiap $b \in B$ dan $a \in A$ maka $f(a) = b$

Gambar :

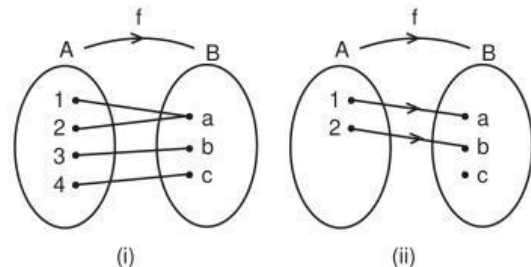


Gambar (i) adalah surjektif dan (ii) bukan surjektif karena ada $c \in B$ yang tak mempunyai pasangan dengan anggota A.

2) Fungsi bersifat INJEKTIF (fungsi satu-satu)

$f : A \rightarrow B$ Injektif jika setiap anggota B yang mempunyai pasangan tepat satu saja pada anggota A. Dan boleh ada anggota B yang tidak mempunyai pasangan anggota A.

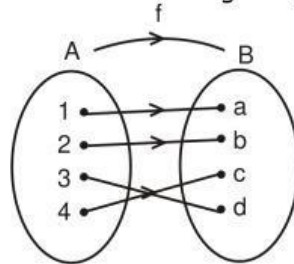
Gambar :



Dari gambar (i) dan (ii) yang merupakan fungsi injektif adalah (ii)

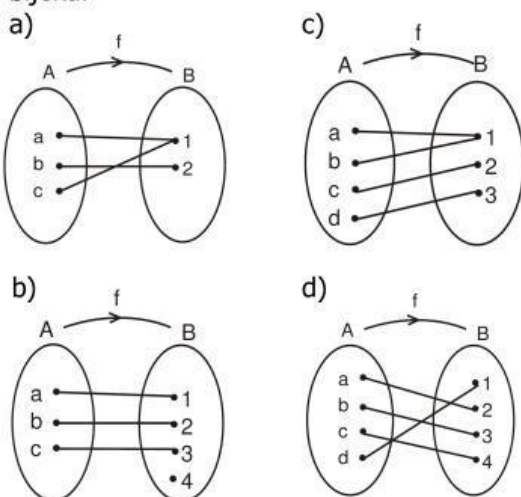
3) Fungsi bersifat BIJEKTIF (korespondensi satu-satu)

Apabila fungsi tersebut adalah fungsi surjektif dan injektif



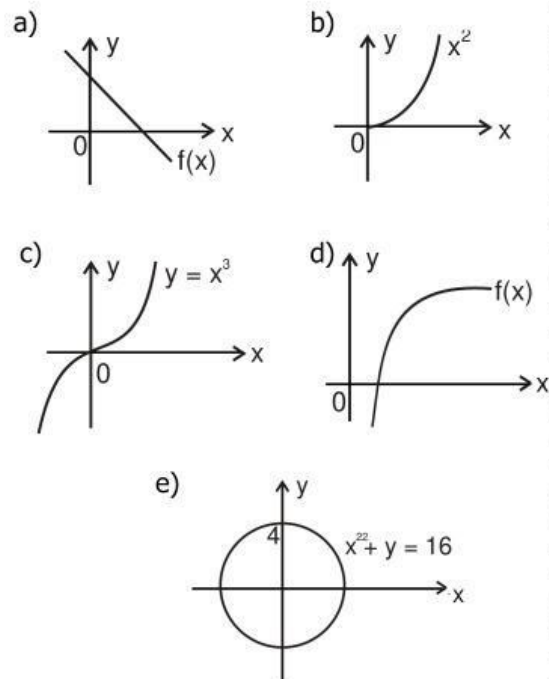
Uji Kompetensi 2

1. Dari gambar berikut manakah yang merupakan fungsi surjektif, injektif, dan bijektif

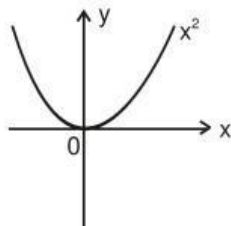


e) Tulislah dalam pasangan berurutan $f(x, y)$

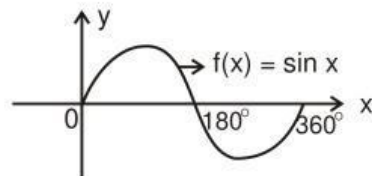
2. Dari fungsi berikut mana yang merupakan fungsi surjektif, injektif dan bijektif



f)



g)



3. Untuk fungsi-fungsi berikut tentukan rumus:

 $f + g$, $f - g$, $\frac{f}{g}$ dan $f \cdot g$. Kemudian tentukan

domain alami dari tiap fungsi yang terbentuk:

a) $f(x) = 3x + 2$ dan $g(x) = 3x^2 + 4x$

b) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ dan $g(x) = 4x + 1$

c) $f(x) = \sqrt{2x}$ dan $g(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

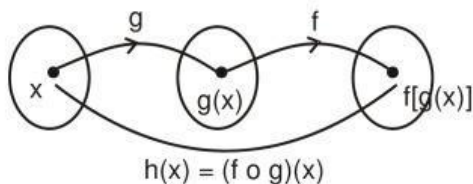
d) $f(x) = \sqrt{x^2 - 64}$ dan $g(x) = \sqrt{8 - x}$

e) $f(x) = \frac{3x+5}{x+1}$ dan $g(x) = 7x - 5$

B. FUNGSI KOMPOSISI

Dua buah fungsi f dan g dikomposisikan dengan suatu "aturan" tertentu yang disebut dengan "komposisi suatu fungsi"

1. Fungsi komposisi $f \circ g$ dapat diperlihatkan dengan diagram berikut:

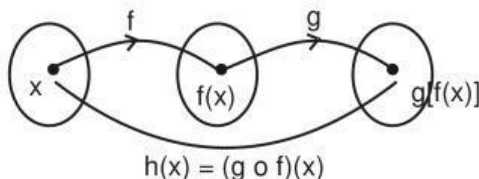


Dapat ditulis: **$(f \circ g)(x) = f[g(x)]$**

Dengan f dan g memenuhi $R_g \cap D_f \neq \emptyset$

dan $D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$

2. Fungsi komposisi $g \circ f$ dapat diperlihatkan dengan diagram berikut:



Dapat ditulis: **$(g \circ f)(x) = g[f(x)]$**

dengan f dan g memenuhi $R_f \cap D_g \neq \emptyset$

dan

$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$

Menentukan Rumus Fungsi Komposisi

Untuk menentukan rumus fungsi komposisi $(g \circ f)(x)$ adalah dengan mensubstitusikan $f(x)$ sebagai fungsi pertama ke x pada $g(x)$ sebagai fungsi kedua.

Demikian juga untuk $(f \circ g)(x)$ perlakuannya sama.

Contoh:

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dengan $f(x) = x^2$

dan $g(x) = 3x + 1$, maka:

$$D_f = \{x \mid x \in \mathbb{R}\} \text{ dan } R_f = \{y \mid y \geq 0\}$$

$$D_g = \{x \mid x \in \mathbb{R}\} \text{ dan } R_g = \{y \mid y \in \mathbb{R}\}$$

$$\begin{aligned} \text{a) } (f \circ g)(x) &= f[g(x)] \\ &= f[3x + 1] \\ &= (3x + 1)^2 \\ &= 9x^2 + 6x + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } (g \circ f)(x) &= g[f(x)] \\ &= g[x^2] \\ &= 3(x^2) + 1 \\ &= 3x^2 + 1 \end{aligned}$$

1) Menentukan $g(x)$ jika diketahui $f(x)$ dan $(f \circ g)(x)$

$$\text{Diketahui } f(x) = \frac{x+3}{x-1}, \quad x \neq 1 \text{ dan}$$

$$(f \circ g)(x) = 2x + 5. \text{ Tentukan } g(x).$$

Jawab:

$$f \circ g(x) = 2x + 5$$

$$f[g(x)] = 2x + 5$$

$$\frac{g(x) + 3}{g(x) - 1} = 2x + 5$$

$$g(x) + 3 = (g(x) - 1)(2x + 5)$$

$$g(x) + 3 = 2x g(x) + 5 g(x) - 2x - 5$$

$$g(x) - 2x g(x) - 5 g(x) = -2x - 8$$

$$-2x g(x) - 4 g(x) = -2x - 8$$

$$g(x) [2x + 4] = 2x + 8$$

$$g(x) = \frac{2x + 8}{2x + 4}, \quad x \neq -2$$

2) Menentukan $f(x)$ jika diketahui $g(x)$ dan $(f \circ g)(x)$

Diketahui $g(x) = \frac{x+3}{x}$, $x \neq 0$ dan

$$(f \circ g)(x) = 3x + 5$$

Tentukan $f(x)$.

Jawab : $(f \circ g)(x) = 3x + 5$

$$\Leftrightarrow f[g(x)] = 3x + 5$$

$$\Leftrightarrow f\left[\frac{x+3}{x}\right] = 3x + 5$$

Misal $p = \frac{x+3}{x} \Leftrightarrow xp = x+3$

$$xp - x = 3$$

$$x(p-1) = 3$$

$$x = \frac{3}{p-1}$$

Substitusikan $x = \frac{3}{p-1}$ ke persamaan di atas

$$\Leftrightarrow f(p) = 3\left(\frac{3}{p-1}\right) + 5$$

$$f(p) = \frac{9}{p-1} + 5$$

$$f(p) = \frac{9}{p-1} + \frac{5(p-1)}{p-1}$$

$$f(p) = \frac{9+5p-5}{p-1}$$

Jadi $f(x) = \frac{5x+4}{x-1}$, $x \neq 1$

Uji Kompetensi 3

1. Jika $f(x) = x^2 + 8x + 5$ dan $g(x) = 3x + 8$.

Tentukan :

a) $(f \circ g)(x)$

b) $(g \circ f)(x)$

c) $(f \circ g)(\frac{1}{2})$

d) $(g \circ f)(-3)$

2. Tentukan $g(x)$ jika diketahui

a) $f(x) = \frac{x+2}{3x-1}$, $x \neq \frac{1}{3}$ dan

$$(f \circ g)(x) = 4x + 5$$

b) $f(x) = \frac{x-1}{x}$, $x \neq 0$ dan

$$(f \circ g)(x) = \frac{x+3}{3x-1}$$
, $x \neq \frac{1}{3}$

c) $f(x) = x^2 + 2x + 1$ dan

$$(f \circ g)(x) = 3x - 2$$

d) $f(x) = \frac{x+6}{2x-1}$, $x \neq \frac{1}{2}$ dan

$$(f \circ g)(x) = x^2 + 8x + 3$$

3. Tentukan $f(x)$ jika diketahui

a) $g(x) = 3x + 2$ dan

$$(f \circ g)(x) = 4x + 1$$

b) $g(x) = \frac{3x-1}{x+2}$, $x \neq -2$ dan

$$(f \circ g)(x) = \frac{3x+2}{x+3}$$
, $x \neq -3$

c) $g(x) = x^2 + 2x + 5$ dan

$$(f \circ g)(x) = 2x^2 + 4x + 9$$

d) $g(x) = \frac{2x-5}{x+2}$, $x \neq -2$ dan

$$(f \circ g)(x) = \frac{4x-7}{x+1}$$
, $x \neq -1$

e) $g(x) = 2x^2 - 5x + 10$ dan

$$(f \circ g)(x) = 8x^2 - 20x + 12$$

f) $g(x) = 3x + 7x - 1$ dan

$$(f \circ g)(x) = 6x^2 + 14x - 1$$

C. FUNGSI INVERS

Suatu fungsi $f : A \rightarrow B$ akan mempunyai fungsi invers $f^{-1} : B \rightarrow A$, jika fungsi f merupakan fungsi yang bijektif atau berkorespondensi satu-satu.

Nilai fungsi f dinyatakan dengan $f(x) = y$ dan fungsi inversnya adalah $f^{-1}(y) = x$

Gambar:

