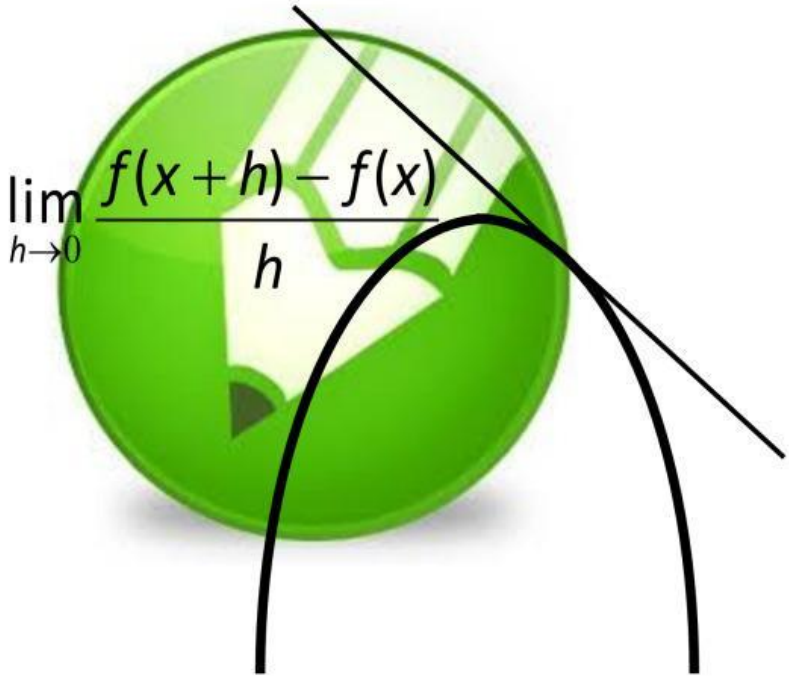
MATEMATIKA
TURUNAN FUNGSI



KELAS : XII IIS

SEMESTER GANJIL

SMA Santa Angela
Bandung
Tahun Pelajaran 2017/2018

LIVEWORKSHEETS

LIVEWORKSHEETS

TURUNAN FUNGSI

PENGANTAR :

Modul ini kami susun sebagai salah satu sumber belajar untuk siswa agar dapat dipelajari dengan lebih mudah. Kami menyajikan materi dalam modul ini berusaha mengacu pada pendekatan kontekstual dengan diharapkan matematika akan makin terasa kegunaannya dalam kehidupan sehari-hari.

STANDAR KOMPETENSI :

6. Menggunakan konsep limit fungsi dan turunan fungsi dalam pemecahan masalah.

KOMPETENSI DASAR :

6.1 Menggunakan konsep dan aturan turunan dalam perhitungan turunan fungsi

6.2 Menggunakan turunan untuk menentukan karakteristik suatu fungsi dan memecahkan masalah

6.3 Merancang model matematika dari masalah yang berkaitan dengan ekstrim fungsi

6.4 Menyelesaikan model matematika dari masalah yang berkaitan dengan ekstrim fungsi dan penafsirannya

TUJUAN PEMBELAJARAN :

1. Menghitung limit fungsi yang mengarah ke konsep turunan.
2. Menghitung turunan fungsi yang sederhana dengan menggunakan definisi turunan
3. Menentukan sifat-sifat turunan fungsi
4. Menentukan turunan fungsi aljabar dan trigonometri dengan menggunakan sifat-sifat turunan
5. Menentukan turunan fungsi komposisi dengan aturan Rantai
6. Menentukan fungsi monoton naik dan turun dengan menggunakan konsep turunan pertama
7. Menentukan titik ekstrim grafik fungsi

LIVEWORKSHEETS

8. Menentukan persamaan garis singgung dari sebuah fungsi
9. Mengidentifikasi masalah-masalah yang bisa diselesaikan dengan konsep ekstrim fungsi
10. Merumuskan model matematika dari masalah ekstrim fungsi
11. Menyelesaiakan model matematika dari masalah ekstrim fungsi
12. Menafsirkan solusi dari masalah nilai ekstrim

KEGIATAN BELAJAR :

I. Judul sub kegiatan belajar :

1. Pengertian Turunan Fungsi
2. Rumus-rumus Turunan Fungsi
3. Turunan Fungsi Trigonometri
4. Dalil Rantai
5. Garis Singgung
6. Fungsi Naik dan Turun
7. Menggambar grafik fungsi

II. Uraian materi dan contoh

PENGERTIAN TURUNAN FUNGSI

Definisi turunan : Fungsi $f : x \rightarrow y$ atau $y = f(x)$ mempunyai turunan yang dinotasikan $y' = f'(x)$ atau $\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx}$ dan di definisikan :

$$y' = f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{atau} \quad \frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{h}$$

Notasi kedua ini disebut notasi Leibniz.

LIVEWORKSHEETS

Contoh 1:

Tentukan turunan dari $f(x) = 4x - 3$

Jawab

$f(x) = 4x - 3$

$f(x + h) = 4(x + h) - 3$

$= 4x + 4h - 3$

Sehingga: $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{(4x + 4h - 3) - (4x - 3)}{h}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{4x + 4h - 3 - 4x + 3)}{h}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{4h}{h}$

$= \lim_{h \to 0} 4$

$= 4$

Contoh 2;

Tentukan turunan dari $f(x) = 3x^2$

Jawab :

$f(x) = 3x^2$

$f(x + h) = 3\ (x + h)^2$

$= 3\ (x^2 + 2xh + h^2)$

$= 3x^2 + 6xh + 3h^2$

Sehingga : $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{(3x^2 + 6xh + 3h^2) - 3x^2}{h}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{6xh + 3h^2}{h}$

$= \lim_{h \to 0} 6x + 3\mathrm{h}$

$= 6x + 3.0$

LIVEWORKSHEETS

$= 6x$

Latihan

Dengan definisi di atas tentukan nilai turunan berikut:

1. $f(x) = 6 - 2x$
2. $f(x) = 5x^2 + 2x$
3. $f(x) = \frac{1}{x^2}$
4. $f(x) = \sqrt{x}$
5. $f(x) = 2x^3$

RUMUS-RUMUS TURUNAN

1. Turunan $f(x) = ax^n$ adalah $f'(x) = anx^{n-1}$ atau $\frac{dy}{dx} = anx^{n-1}$

2. Untuk u dan v suatu fungsi,c bilangan Real dan n bilangan Rasional berlaku

   a. $y = v \pm u \rightarrow y' = v' \pm u'$
   b. $y = c.u \rightarrow y' = c.u'$
   c. $y = u.v \rightarrow y' = u'\ v + u.v'$
   d. $y = \frac{u}{v} \rightarrow y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
   e. $y = u^n \rightarrow y' = n.\ u^{n-1}.u'$

Contoh: 3

Soal ke-1

Jika $f(x) = 3x^2 + 4$ maka nilai $f^1(x)$ yang mungkin adalah ….

Pembahasan

$f(x) \quad = 3x^2 + 4$

$f^1(x) \quad = 3.2x$

$\quad = 6x$

Soal ke-2

Nilai turunan pertama dari: $f(x) = 2(x)^3 + 12x^2 - 8x + 4$ adalah …

Pembahasan

$f(x) \quad = 2x^3 + 12x^2 - 8x + 4$

LIVEWORKSHEETS

$f^1(x) \quad = 2.3x^2 + 12.2x - 8$
$\quad\quad = 6x^2 + 24x - 8$

Soal ke-3
Turunan ke- 1 dari $f(x) = (3x-2)(4x+1)$ adalah …
Pembahasan
$f(x) \quad = (3x-2)(4x+1)$
$f(x) \quad = 12x^2 + 3x - 8x - 2$
$f(x) \quad = 12x^2 - 5x - 2$
$f^1(x) \quad = 24x - 5$

Soal ke- 4
Jika $f(x) = (2x - 1)^3$ maka nilai $f^1(x)$ adalah …
Pembahasan
$f(x) \quad = (2x - 1)^3$
$f^1(x) = 3(2x - 1)^2 (2)$
$f^1(x) = 6(2x - 1)^2$
$f^1(x) = 6(2x - 1)(2x - 1)$
$f^1(x) = 6(4x^2 - 4x+1)$
$f^1(x) = 24x^2 - 24x + 6$
Soal ke- 5
Turunan pertama dari $f(x) = (5x^2 - 1)^2$ adalah …
Pembahasan
$f(x) \quad = (5x^2 - 1)^3$
$f^1(x) = 2(5x^2 - 1) (10x)$
$f^1(x) = 20x (5x^2 - 1)$
$f^1(x) = 100x^3 - 20x$

Soal ke- 6
Turunan pertama dari $f(x) = (3x^2 - 6x) (x + 2)$ adalah …
Pembahasan
$f(x) \quad = (3x^2 - 6x) (x + 2)$
<u>Cara 1:</u>
Misal : $U \quad = 3x^2 - 6x$
$\quad\quad U^1 \quad = 6x - 6$

LIVEWORKSHEETS

$V = x + 2$
$V^1 = 1$

Sehingga:

$f'(x) = U' V + U V'$
$f^1(x) = (6x - 6)(x+2) + (3x^2+6x).1$
$f^1(x) = 6x^2 + 12x - 6x - 12 + 3x^2 - 6x$
$f^1(x) = 9x^2 - 12$

<u>Cara 2:</u>

$f(x) = (3x^2 - 6x)(x + 2)$
$f^1(x) = 3x^{-3}+6x^2 - 6x^3 - 12x$
$f^1(x) = 9x^2+12x - 12x - 12$
$f^1(x) = 9x^2 - 12$

Latihan soal.

Tentukan turunan dari:

1. $f(x) = 2x^{-3}$
2. $f(x) = \dfrac{3}{x^5}$
3. $f(x) = 4\sqrt{x^3}$
4. $f(x) = 4x^2 + x^{\frac{2}{3}} - \sqrt{x}$
5. $f(x) = (2x + 1)(3x - 2)$
6. $f(x) = \dfrac{(x+2)^2}{\sqrt{x}}$
7. $f(x) = (x^2 + 3)^{\frac{4}{3}}$
8. $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x}$

LIVEWORKSHEETS

DALIL RANTAI UNTUK MENENTUKAN TURUNAN

Apabila y = f(g(x)) maka y' = f' (g(x)). g'(x)

Dari rumus y = f(g(x)) → y' = f' (g(x)). g'(x)

Jika g(x) = u→ g' (x) = $\frac{du}{dx}$ dan f(g(x)) = f(u) → y = f(u) → $\frac{dy}{du}$ = f'(u) = f'(g(x))

Maka f'(x) = f' (g(x)). g'(x) dapat dinyatakan ke notasi Leibniz menjadi

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}$$

Dan bentuk tersebut dapat dikembangkan jika y = f (u(v)) maka:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dv}.\frac{dv}{dx}$$

Contoh 5:

Dengan notasi Leibniz tentukam yurunan dari : $y = (x^2 - 3x)^{\frac{4}{3}}$

Jawab:

$y = (x^2 - 3x)^{\frac{4}{3}}$

missal : $u = x^2 - 3x \rightarrow \frac{du}{dx} = 2x - 3$

$$y = u^{\frac{3}{4}} \quad \rightarrow \frac{dy}{du} = \frac{4}{3}u^{\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{4}{3}(x^2 - 3x)^{\frac{1}{3}}$$

Sehingga :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx} = \frac{4}{3}(x^2 - 3x)^{\frac{1}{3}}.(2x - 3)$$

$$= \left(\frac{8}{x} - 4\right)\left(x^2 - 3x\right)^{\frac{1}{3}}$$

Latihan soal :

LIVEWORKSHEETS

1. Dengan rumus turunan y = f (g(x)) adalah f' (x) = f'(g(x)). g'(x)

   Tentukan turunan dari: $y = (4x + 5)^{\frac{3}{2}}$

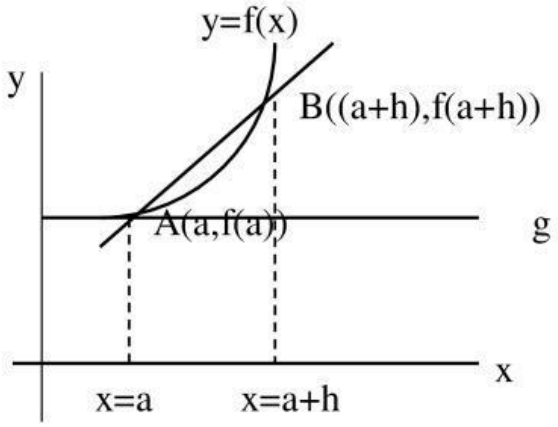
2. Dengan notasi Leibniz tentukan turunan fungsi berikut : $y = (6 - x^2)^3$

GARIS SINGGUNG PADA KURVA

1. Gradien garis singgung

   Perhatikan gambar di bawah ini
   Gradien garis AB adalah

$$m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$
$$= \frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a}$$
$$= \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$



Apabila garis ABdiputar pada titik A maka titik B akan bergerak mendekati titik A (h→0) maka tali busur ABmenjadi garis singgung (g) pada kurva y = f(x) di titik A (a,f(a))dengan gradient

LIVEWORKSHEETS

$$m_g = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$\boxed{m_g = f'(a)}$$

Sehingga persamaan garis singgung pada kurva y = f(x) di titik A (a,f(a)) atau A (x_1,y_1) adalah

$$\boxed{y - y_1 = m\,(x - x_1)}$$

Contoh 6:

Diketahui kurva $y = x^2 - 3x + 4$ dan titik A (3,4)

a. Tentukan gradien garis singgung di titik A.
b. Tentukan persamaan garis singgung di titik A.

Jawab:

$y = x^2 - 3x + 4$

$y' = 2x - 3$

a. Gradien di titik A (3,4)
   $m = y'_{x=3} = 2.3 - 3 = 6 - 3 = 3$
b. Persamaan garis singgung di titik A (3,4)
   $y - y_1 = m\,(x - x_1)$
   $y - 4 = 3\,(x - 3)$
   $y - 4 = 3x - 9$
   $y = 3x - 5$

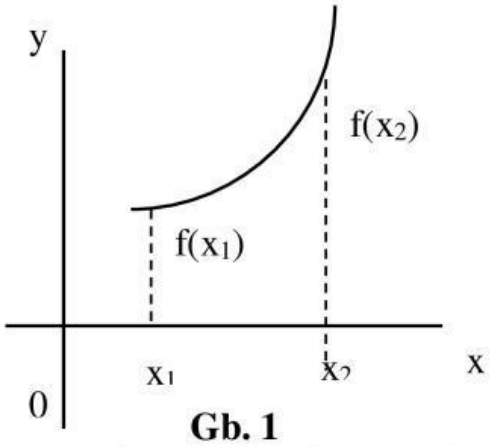
Latihan soal

1. Tentukan gradien garis singgung pada kurva:
   a. $y = x^2 - 6x$ di titik (-1,7)
   b. $y = \sin 2x$ di titik $(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2})$
2. Tentukan persamaan garis singgung pada kurva
   a. $y = x^2 - 2x - 3$ di titik (3,1)
   b. $y = x - 2x^2$ di titik dengan absis 1
   c. $y = (2-x)(2x+1)$ di titik dengan ordinat 2

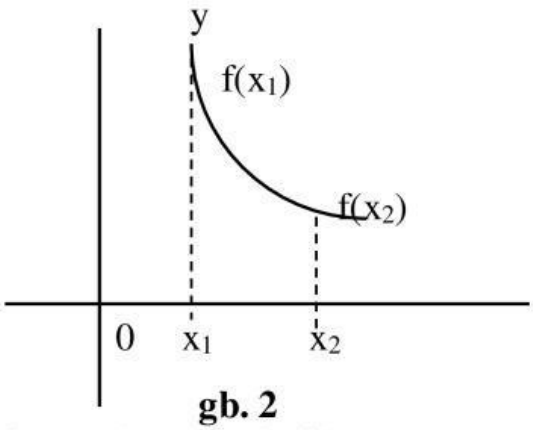
LIVEWORKSHEETS

3. Suatu garis singgung pada kurva $y = 3 + 2x - x^2$ sejajar dengan garis $4x + y = 3$, tentukan :
   a. Titik singgung
   b. persamaan garis singgung

FUNGSI NAIK DAN FUNGSI TURUN



Gb. 1



gb. 2

1. Fungsi f(x) disebut fungsi naik pada interval $a \leq x \leq b$, jika untuk setiap x_1 dan x_2 dalam interval $a \leq x \leq b$ berlaku :

   $x_2 > x_1 \Leftrightarrow f(x_2) > f(x_1)$ (gb. 1)

2. Fungsi f(x) disebut fungsi turun pada interval $a \leq x \leq b$, jika untuk setiap x_1 dan x_2 dalam interval $a \leq x \leq b$ berlaku :

   $x_2 > x_1 \Leftrightarrow f(x_2) < f(x_1)$ (gb. 2)

3. Fungsi f disebut fungsi naik pada titik dengan absis a, jika $f'(a) > 0$
4. Fungsi f disebut fungsi turun pada titik dengan absis a, jika $f'(a) < 0$

LIVEWORKSHEETS

Contoh 7 :

Tentukan pada interval mana fungsi $f(x) = x^3 + 9x^2 + 15x + 4$ merupakan :

a. Fungsi naik
b. Fungsi turun

Jawab:

$f(x) = x^3 + 9x^2 + 15x + 4$

$f'(x) = 3x^2 + 18x + 15$

a. Syarat fungsi naik

$f'(x) > 0$

$3x^2 + 18x + 15 > 0$

$x^2 + 6x + 5 > 0$

$(x+1)(x+5) > 0$

Harga batas

$x = -1$, $x = -5$

-5 -1

Jadi fungsi naik pada interval $x < -5$ atau $x > -1$

b. Syarat fungsi turun

$f'(x) < 0$

$3x^2 + 18x + 15 < 0$

$x^2 + 6x + 5 < 0$

$(x+1)(x+5) < 0$

Harga batas

$x = -1$, $x = -5$

-5 -1

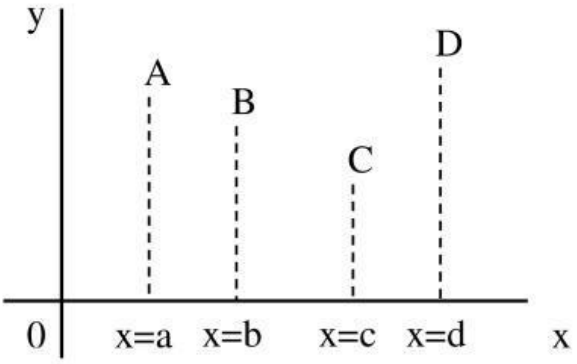
Jadi fungsi naik pada interval $-5 < x < -1$

Latiha soal

1. Tentukan pada interval mana fungsi berikut merupakan fungsi naik atau fungsi turun.
   a. $f(x) = x^2 - 6x$
   b. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 4x^2 - 20x + 2$
   c. $f(x) = (x^2 - 1)(x+1)$
2. Tunjukkan bahwa fungsi $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x + 6$ tidak pernah turun.

LIVEWORKSHEETS

NILAI STASIONER

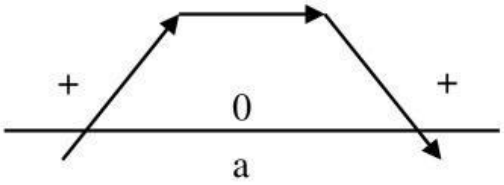


Perhatikan grafik fungsi y = f(x) disamping
Pada titik A,B,C dan D dengan absis berturut-turut x = a, x = b, x = c dan x = d menyebabkan $f'(x) = 0$ maka f(a), f(b), f(c) dan f(d) merupakan nilai – nilai stasioner.

Jenis – jenis nilai stasioner

1. Nilai stasioner di titik A.

Pada : x < a diperoleh $f'(x) > a$
x = a diperoleh $f'(x) = a$
x > a diperoleh $f'(x) < a$

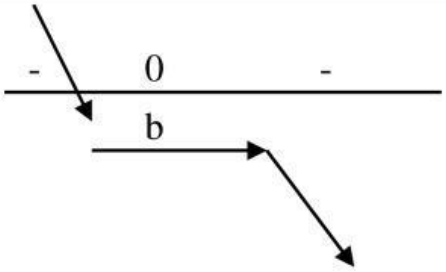


Fungsi yang mempunyai sifat demikian dikatakan fungsi f(x) mempunyai nilai
stasioner maksimum f(a) pada x = a dan titik (a,f(a)) disebut titik balik maksimum.

2. Nilai stasioner di titik B dan D.

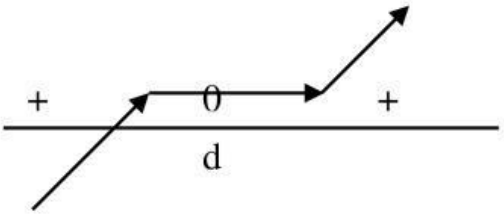
a. Pada : x < b diperoleh $f'(x) < 0$
x = b diperoleh $f'(x) = 0$
x > b diperoleh $f'(x) < 0$

LIVEWORKSHEETS



Fungsi ini mempunyai nilai stasioner belok turun f(b) pada x = b dan titik (b,f(b)) disebut titik belok.

b. Pada : $x < d$ diperoleh $f'(x) > 0$
$x = d$ diperoleh $f'(x) = d$
$x > d$ diperoleh $f'(x) > d$

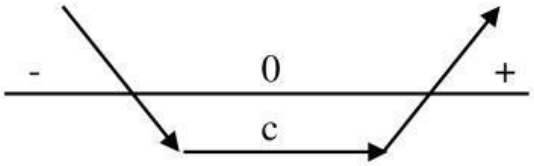


fungsi ini mempunyai nilai stasioner belok turun f(d) pada x = dan titik (d,f(d))
disebut titik belok

Pada titik B atau D sering hanya disingkat nilai stasioner belok.

3. Nilai stasioner di titik C

Pada : $x < c$ diperoleh $f'(x) < 0$
$x = c$ diperoleh $f'(x) = 0$
$x > c$ diperoleh $f'(x) > 0$



Fungsi ini mempunyai nilai stasioner minimum f(c) pada x =c dan titik (c,f(c))
disebut titik balik minimum.

LIVEWORKSHEETS