Catatan Mekanika Kuantum 1

Potensial Tangga, Potensial Sumur, Potensial Penghalang, Efek Terobosan

Acuan utama Gasiorowicz, *Quantum Physics* Ed. 3, Bab 4, Subbab 1 – 4

Sebelum ini kita telah menerapkan mekanika kuantum untuk menganalisis partikel dalam kotak. Kasus partikel dalam kotak merupakan kasus yang paling sederhana, karena di dalam kotak tidak ada interaksi, $V(x) = 0$. Kini, kita lihat kasus dengan potensial tidak nol, dengan bentuk potensial yang dipakai masih tetap yang sederhana. Meskipun sederhana, banyak hal-hal dasar yang dapat kita pelajari mengenai mekanika kuantum.

A. Potensial tangga

Potensial tangga diberikan sebagai berikut:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & , \ (x < 0) \\ V_0 & , \ (x > 0) \end{cases} \quad . \tag{1}$$

Di sini kita anggap partikel mula-mula datang dari kiri (x^-) menuju ke kanan (x^+). Kita lihat ada dua daerah dengan potensial berbeda, bidang batas kedua daerah tersebut ada di titik $x = 0$. Dua daerah dengan interaksi berbeda tersebut dapat dilihat sebagai dua medium atau dua lingkungan berbeda. Jadi, dibayangkan partikel datang dari medium / lingkungan pertama ke medium / lingkungan kedua. Kita mulai dengan persamaan Schrödinger:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}u(x) + V(x)u(x) = Eu(x)\,, \tag{2}$$

yang kita ubah menjadi persamaan differensial:

$$\frac{d^2}{dx^2}u(x) + \frac{2m[E - V(x)]}{\hbar^2}u(x) = 0\,. \tag{3}$$

Perhatikan bahwa energi total E tetap sama, baik di daerah 1 ($x < 0$) maupun di daerah 2 ($x > 0$).

- Daerah 1 ($x < 0$):

$$\begin{aligned} &\frac{d^2}{dx^2}u_1(x) + \frac{2mE}{\hbar^2}u_1(x) = 0 \\ &\rightarrow \frac{d^2}{dx^2}u_1(x) + k^2u_1(x) = 0\,, \ \left(k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}\right) \qquad (4) \\ &\rightarrow u_1(x) = e^{ikx} + Re^{-ikx}\,. \qquad (5) \end{aligned}$$

Solusi $u_1(x)$ menunjukkan superposisi 2 gelombang. Ini bukan sekedar merupakan solusi umum persamaan (4) secara matematis, namun secara fisis merepresentasikan partikel bergerak ke kanan (suku pertama) dan partikel bergerak ke kiri (suku kedua). Bagaimana bisa ada partikel bergerak ke kiri, ini dapat dipahami mengingat sifat gelombang, yaitu apabila bertemu medium berbeda ada sebagian yang dipantulkan; R disebut amplitudo refleksi. Turunan pertama $u_1(x)$ dan fluks peluang $j_1(x)$ diperoleh sebagai berikut:

$$\frac{d}{dx}u_1(x) = ik\left(e^{ikx} - Re^{-ikx}\right) \tag{6}$$

$$j_1(x) = \frac{\hbar k}{m}(1 - |R|^2)\,. \tag{7}$$

Fluks $j_1(x)$ menunjukkan arus partikel ke kanan dan arus partikel ke kiri.

- Daerah 2 ($x > 0$):

$$\frac{d^2}{dx^2}u_2(x) + \frac{2m(E - V_0)}{\hbar^2}u_2(x) = 0$$

$$\to \frac{d^2}{dx^2}u_2(x) + q^2 u_2(x) = 0\,, \quad \left(q^2 = \frac{2m(E - V_0)}{\hbar^2}\right) \tag{8}$$

$$\to u_2(x) = Te^{iqx}\,. \tag{9}$$

Solusi $u_2(x)$ merepresentasikan hanya partikel yang bergerak ke kanan, tidak ada partikel bergerak ke kiri. Ini dapat dipahami mengingat di daerah 2 gelombang tidak bertemu medium lain lagi, sehingga tidak ada gelombang yang dipantulkan di daerah 2. Partikel di daerah 2 berasal dari daerah 1; T disebut amplitudo transmisi. Turunan pertama $u_2(x)$ dan fluks peluang $j_2(x)$ diperoleh sebagai berikut:

$$\frac{d}{dx}u_2(x) = iqTe^{iqx} \tag{10}$$

$$j_2(x) = \frac{\hbar q}{m}|T|^2\,. \tag{11}$$

Fluks $j_2(x)$ menunjukkan arus partikel ke kanan.

- Kita tinjau di bidang batas 2 daerah ($x = 0$). Sesuai syarat kontinyu:

$$u_1(0) = u_2(0) \to 1 + R = T \tag{12}$$

$$\frac{d}{dx}u_1(x)|_{x=0} = \frac{d}{dx}u_2(x)|_{x=0} \to k(1 - R) = qT \tag{13}$$

$$j_1(0) = j_2(0) \to k(1 - |R|^2) = q|T|^2\,. \tag{14}$$

Persamaan (14) bermakna bahwa tidak ada partikel yang hilang atau bertambah, bahwa arus bersih (*nett*) partikel di semua daerah sama, bahwa fluks tetap.

Dari persamaan (12) dan (13) diperoleh:

$$R = \frac{k - q}{k + q} \qquad \text{dan} \qquad T = \frac{2k}{k + q}\,, \tag{15}$$

sehingga diperoleh fluks:

$$\frac{\hbar k}{m}|R|^2 = \frac{\hbar k}{m}\left(\frac{k-q}{k+q}\right)^2 \qquad \text{dan} \qquad \frac{\hbar q}{m}|T|^2 = \frac{\hbar k}{m}\frac{4kq}{(k+q)^2}\,, \tag{16}$$

yang sesuai dengan persamaan (14).

Beberapa catatan:

- Kita lihat perbedaan tinjauan fisika klasik dan tinjauan mekanika kuantum. Menurut fisika klasik jika partikel bergerak masuk ke lingkungan dengan energi potensial lebih besar, maka partikel terus bergerak maju dengan kecepatan (energi kinetik) lebih rendah. Menurut mekanika kuantum, partikel bukan hanya dapat terus bergerak maju, melainkan juga terpantul.

- Jika $E \gg V_0$, maka $q \simeq k$, sehingga fluks terpantul sangat kecil atau nol sedangkan fluks yang diteruskan sama atau hampir sama dengan fluks yang datang (lihat persamaan (16)). Ini dapat dipahami bahwa apabila $E \gg V_0$ perubahan lingkungan dari $V = 0$ ke $V = V_0$ tidak terlalu dirasakan, sehingga partikel terus bergerak maju tanpa banyak perubahan dan tidak ada yang terpantul.

- Sebaliknya, jika E hanya sedikit saja lebih tinggi dari V_0, maka $q \to 0$, sehingga fluks yang diteruskan sangat kecil atau nol sedangkan fluks terpantul sama atau hampir sama dengan fluks yang datang (lihat persamaan (16)). Pada kasus ini, perubahan lingkungan dari $V = 0$ ke $V = V_0$ sangat terasa.

- Jika $E < V_0$, maka $q = i\kappa$ (q imajiner, κ riil), sehingga $|R|^2 = 1$:

$$q^2 = \frac{2m(E-V_0)}{\hbar^2} = -\frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2} = i^2\kappa^2 \tag{17}$$

$$\kappa = \sqrt{\frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}} \tag{18}$$

$$|R|^2 = R^*R = \left(\frac{k+i\kappa}{k-i\kappa}\right)\left(\frac{k-i\kappa}{k+i\kappa}\right) = 1\,. \tag{19}$$

Berarti, semua partikel dipantulkan, terjadi pemantulan sempurna (*total reflection*). Namun, nilai $|T|^2 \neq 0$, yang berarti bahwa ada peluang partikel masuk ke daerah 2. Ini yang menjelaskan efek terobosan, yang dibahas di bawah, yang merupakan fenomena kuantum, tidak ditemukan dalam fisika klasik. Dengan $q = i\kappa$, $u_2(x)$ cepat meluruh dengan bertambahnya x:

$$u_2(x) = Te^{-\kappa x}\,, \tag{20}$$

sehingga rapat peluang mendapat partikel di daerah 2 juga cepat meluruh:

$$|u_2(x)|^2 = |T|^2 e^{-2\kappa x}\,. \tag{21}$$

- Kita lihat pada analisis mekanika kuantum di atas bahwa pada amplitudo refleksi R dan amplitudo transmisi T tidak terdapat $\hbar$, yang dapat dianggap menjadi ciri perhitungan mekanika kuantum. Seakan-akan, dengan demikian, perhitungan mekanika kuantum tersebut memenuhi limit klasik (ingat prinsip korespondensi), yang berarti fenomena refleksi juga dapat terjadi dalam proses fisika klasik. Namun, pada kenyataannya, pada proses fisika klasik hal itu tidak terjadi. Mengapa? Sesungguhnya, perhitungan mekanika kuantum di atas tidaklah memenuhi limit klasik. Untuk memenuhi limit klasik, yaitu bahwa partikel menunjukkan fenomena gelombang, bahwa terjadi refleksi, maka panjang gelombang de Broglie partikel ($\lambda = h/p$) haruslah lebih kecil dari ukuran sistem yang diamati. Pada kasus potensial tangga, fenomena terjadi di daerah yang sangat sempit di $x = 0$, di posisi terjadi diskontinuitas potensial. Dengan demikian, λ tidak pernah dapat lebih kecil dari ukuran sistem yang diamati, limit klasik tidak pernah terpenuhi. Keadaan menjadi mendekati limit klasik, jika λ dibuat sangat kecil dengan menaikkan energi (momentum). Namun, pada energi tinggi, $q \simeq k$, sehingga juga tidak terjadi refleksi.

B. Potensial sumur

Potensial sumur diberikan sebagai berikut:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & , \ (x < -a) \\ -V_0 & , \ (-a < x < a) \\ 0 & , \ (x > a) \end{cases} . \tag{22}$$

Kita anggap partikel mula-mula datang dari kiri (x^-) menuju ke kanan (x^+). Ada tiga daerah yang diamati, dengan dua bidang batas, yaitu di titik $x = -a$ dan $x = a$. Kita mulai dengan persamaan Schrödinger, yang kita ubah menjadi persamaan differensial:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}u(x) + V(x)u(x) = Eu(x) \tag{23}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}u(x) + \frac{2m[E - V(x)]}{\hbar^2}u(x) = 0 \tag{24}$$

Energi total E tetap sama, baik di daerah 1 ($x < -a$), daerah 2 ($-a < x < a$), maupun di daerah 3 ($x > a$).

- Daerah 1 ($x < -a$):

$$\frac{d^2}{dx^2}u_1(x) + \frac{2mE}{\hbar^2}u_1(x) = 0$$

$$\rightarrow \frac{d^2}{dx^2}u_1(x) + k^2 u_1(x) = 0\,, \ \left(k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}\right) \tag{25}$$

$$\rightarrow u_1(x) = e^{ikx} + Re^{-ikx} \tag{26}$$

$$\frac{d}{dx}u_1(x) = ik\left(e^{ikx} - Re^{-ikx}\right) \tag{27}$$

$$j_1(x) = \frac{\hbar k}{m}(1 - |R|^2)\,. \tag{28}$$

- Daerah 2 ($-a < x < a$):

$$\frac{d^2}{dx^2}u_2(x) + \frac{2m(E+V_0)}{\hbar^2}u_2(x) = 0$$

$$\rightarrow \frac{d^2}{dx^2}u_2(x) + q^2 u_2(x) = 0\,, \ \left(q^2 = \frac{2m(E+V_0)}{\hbar^2}\right) \tag{29}$$

$$\rightarrow u_2(x) = Ae^{iqx} + Be^{-iqx} \tag{30}$$

$$\frac{d}{dx}u_2(x) = iq\left(Ae^{iqx} - be^{-iqx}\right) \tag{31}$$

$$j_2(x) = \frac{\hbar q}{m}(|A|^2 - |B|^2)\,. \tag{32}$$

$$\tag{33}$$

- Daerah 3 ($x > a$):

$$\frac{d^2}{dx^2}u_3(x) + \frac{2mE}{\hbar^2}u_3(x) = 0$$

$$\rightarrow \frac{d^2}{dx^2}u_3(x) + k^2 u_3(x) = 0 \tag{34}$$

$$\rightarrow u_3(x) = Te^{ikx} \tag{35}$$

$$\frac{d}{dx}u_3(x) = ikTe^{ikx} \tag{36}$$

$$j_3(x) = \frac{\hbar k}{m}|T|^2\,. \tag{37}$$

- Kita tinjau di bidang batas $x = -a$. Sesuai syarat kontinyu:

$$u_1(-a) = u_2(-a) \rightarrow e^{-ika} + Re^{ika} = Ae^{-iqa} + Be^{iqa} \tag{38}$$

$$\frac{d}{dx}u_1(x)|_{x=-a} = \frac{d}{dx}u_2(x)|_{x=-a} \rightarrow k\left(e^{-ika} - Re^{ika}\right) = q\left(Ae^{-iqa} - Be^{iqa}\right) \tag{39}$$

$$j_1(-a) = j_2(-a) \rightarrow k(1 - |R|^2) = q(|A|^2 - |B|^2)\,. \tag{40}$$

Dari persamaan (38) dan (39) diperoleh:

$$A = \frac{e^{iqa}}{2q}\left[(q+k)e^{-ika} + (q-k)Re^{ika}\right] \tag{41}$$

$$B = \frac{e^{-iqa}}{2q}\left[(q-k)e^{-ika} + (q+k)Re^{ika}\right]\,. \tag{42}$$

- Kita tinjau di bidang batas $x = a$. Sesuai syarat kontinyu:

$$u_2(a) = u_3(a) \rightarrow Ae^{iqa} + Be^{-iqa} = Te^{ika} \tag{43}$$

$$\frac{d}{dx}u_2(x)|_{x=a} = \frac{d}{dx}u_3(x)|_{x=a} \rightarrow q\left(Ae^{iqa} - Be^{-iqa}\right) = kTe^{ika} \tag{44}$$

$$j_2(a) = j_3(a) \rightarrow q(|A|^2 - |B|^2) = k|T|^2\,. \tag{45}$$

Dari persamaan (40) dan (45) diperoleh kekekalan fluks:

$$\frac{\hbar k}{m}(1-|R|^2) = \frac{\hbar q}{m}(|A|^2 - |B|^2) = \frac{\hbar k}{m}|T|^2 . \tag{46}$$

Dari persamaan (43), dan (44) diperoleh:

$$A = \frac{e^{-iqa}}{2q}(q+k)Te^{ika} \tag{47}$$

$$B = \frac{e^{iqa}}{2q}(q-k)Te^{ika} . \tag{48}$$

Dari persamaan (41) dan (47), serta (42) dan (48) diperoleh:

$$e^{iqa}\left[(q+k)e^{-ika} + (q-k)Re^{ika}\right] = e^{-iqa}(q+k)Te^{ika} \tag{49}$$

$$e^{-iqa}\left[(q-k)e^{-ika} + (q+k)Re^{ika}\right] = e^{iqa}(q-k)Te^{ika} . \tag{50}$$

Dari persamaan (49) dan (50) diperoleh amplitudo refleksi dan amplitudo transmisi:

$$R = ie^{-2ika}\frac{(q^2-k^2)\sin 2qa}{2kq\cos 2qa - i(q^2+k^2)\sin 2qa} \tag{51}$$

$$T = e^{-2ika}\frac{2kq}{2kq\cos 2qa - i(q^2+k^2)\sin 2qa} . \tag{52}$$

Jika $E \gg V_0$, maka $q \simeq k$, sehingga refleksi kecil atau tidak ada. Jika $E \to 0$, maka $k \to 0$, sehingga transmisi kecil atau tidak ada. Jika $2qa = n\pi$, $(n = 1, 2, 3, ...)$, refleksi nol. Ini terjadi pada energi:

$$q^2 = \frac{2m(E+V_0)}{\hbar^2} = \frac{n^2\pi^2}{4a^2} \to E = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{8ma^2} - V_0 . \tag{53}$$

C. Potensial penghalang

Potensial penghalang diberikan sebagai berikut:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & , (x < -a) \\ V_0 & , (-a < x < a) \\ 0 & , (x > a) \end{cases} . \tag{54}$$

Perhitungan untuk kasus potensial penghalang sama dengan perhitungan untuk kasus potensial sumur, namun dengan mengubah V_0 menjadi $-V_0$. Dengan demikian, amplitudo refleksi dan amplitudo transmisi diperoleh sebagai:

$$R = ie^{-2ika}\frac{(q^2-k^2)\sin 2qa}{2kq\cos 2qa - i(q^2+k^2)\sin 2qa} \tag{55}$$

$$T = e^{-2ika}\frac{2kq}{2kq\cos 2qa - i(q^2+k^2)\sin 2qa} , \tag{56}$$

dengan

$$q^2 = \frac{2m(E-V_0)}{\hbar^2} . \tag{57}$$

Jika $E \gg V_0$, maka $q \simeq k$, sehingga refleksi kecil atau tidak ada. Apabila E sedikit saja lebih tinggi dari V_0, maka $q \to 0$, sehingga $\sin 2qa \simeq 2qa$, $R \to 1$, transmisi kecil. Jika $2qa = n\pi$, $(n = 1, 2, 3, ...)$, refleksi nol. Ini terjadi pada energi:

$$E = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{8ma^2} + V_0\,. \tag{58}$$

D. Efek terobosan

Hal yang menarik pada kasus potensial penghalang adalah jika $E < V_0$. Jika $E < V_0$:[1]

$$q^2 = \frac{2m(E - V_0)}{\hbar^2} = -\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2} = i^2\kappa^2 \tag{60}$$

$$\kappa = \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}} \tag{61}$$

$$T = e^{-2ika}\frac{2k\kappa}{2k\kappa\cosh 2\kappa a - i(k^2 - \kappa^2)\sinh 2\kappa a} \tag{62}$$

$$|T|^2 = \frac{(2k\kappa)^2}{(k^2 + \kappa^2)^2\sinh^2 2\kappa a + (2k\kappa)^2}\,. \tag{63}$$

Walaupun $E < V_0$, transmisi tetap ada. Ini disebut fenomena terobosan atau efek terobosan (seolah-olah partikel menerobos ke dalam potensial penghalang dan muncul di sisi lain). Jika potensial penghalang sangat tinggi ($E \ll V_0$) dan / atau sangat lebar ($a \gg 1$), maka $\kappa a \gg 1$, sehingga $\sinh 2\kappa a \simeq \frac{1}{2}e^{2\kappa a}$ dan peluang transmisi / terobosan menjadi lebih sederhana:

$$|T|^2 \simeq \frac{(4k\kappa)^2}{(k^2 + \kappa^2)^2 e^{4\kappa a} + 4(2k\kappa)^2} \simeq \left(\frac{4k\kappa}{k^2 + \kappa^2}\right)^2 e^{-4\kappa a} \tag{64}$$

Untuk bentuk potensial bukan kotak, $|T|^2$ secara pendekatan dapat dicari sebagai berikut. Kita ambil persamaan (64) dan hitung logaritma naturalnya:

$$\ln|T|^2 \simeq \ln\left(\frac{4k\kappa}{k^2 + \kappa^2}\right)^2 + \ln e^{-4\kappa a} \simeq (\text{suatu nilai}) - 4\kappa a\,. \tag{65}$$

Untuk selanjutnya, kita ambil saja:

$$\ln|T|^2 \simeq -(2\kappa)(2a)\,. \tag{66}$$

Apabila $V(x)$ tidak berbentuk kotak, kita bagi menjadi beberapa bagian, dengan lebar masing-masing Δx, sehingga terdapat $N = 2a/\Delta x$ (lihat Gasiorowicz Gambar 4-4). Untuk tiap bagian kita anggap κ konstan sebesar nilai rata-ratanya $\langle\kappa\rangle$. Dengan demikian diperoleh:

$$\ln|T|^2 \simeq \sum_{n=1}^{N}\ln|T|_n^2 \simeq -2\sum_{n=1}^{N}\Delta x\langle\kappa\rangle\,. \tag{67}$$

---

[1] Ingat kembali:

$$\cos ix = \cosh x\,, \quad \sin ix = i\sinh x\,, \quad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1\,. \tag{59}$$

Apabila Δx dibuat sangat kecil (*infinitesimal*), $\Delta x \to dx$, diperoleh:

$$\ln |T|^2 \simeq -2 \int dx \kappa(x) \simeq -\frac{2}{\hbar} \int dx \sqrt{2m(V(x) - E)} \,. \tag{68}$$

$$|T|^2 \simeq C e^{-\frac{2}{\hbar} \int dx \sqrt{2m(V(x)-E)}} \,. \tag{69}$$

Beberapa contoh fenomena terobosan diberikan di Gasiorowicz.

Pada fenomena terobosan energi total kurang dari potensial, berarti partikel bergerak dengan energi kinetik negatif, padahal energi kinetik selalu positif, bagaimana penjelasannya? Bahwa partikel bergerak dengan energi kinetik negatif, itu bayangan di pikiran kita. Sebaiknya, kita lihat saja, apakah memang dapat kita temukan atau amati partikel bergerak dengan energi kinetik negatif pada efek terobosan. Kita ambil potensial penghalang kotak dan lakukan sebagai berikut:
Partikel dibayangkan memiliki energi kinetik negatif selama berada di dalam potensial penghalang, yang lebarnya, anggap saja, $2a$. Untuk mendapatkan / mendeteksi / mengamati partikel berada di dalam potensial, ketelitian pengamatan posisi Δx haruslah sangat kecil dibandingkan dengan lebar potensial:

$$\Delta x \ll 2a \,. \tag{70}$$

Menurut ketidakpastian Heisenberg $\Delta p \Delta x \geqslant \hbar/2$, ketelitian pengamatan momentum Δp menjadi:

$$\Delta p \gg \frac{\hbar}{4a} \,, \tag{71}$$

yang memberikan ketelitian pengamatan energi kinetik ΔE sebesar:

$$\Delta E \gg \frac{\hbar^2}{32ma^2} \,. \tag{72}$$

Nilai ΔE haruslah sangat kecil dibandingkan dengan nilai mutlak energi kinetik $|E - V_0| = V_0 - E$:

$$V_0 - E \gg \Delta E \gg \frac{\hbar^2}{32ma^2} \to \frac{\hbar^2 \kappa^2}{2m} \gg \Delta E \gg \frac{\hbar^2}{32ma^2} \to \frac{\hbar^2 \kappa^2}{2m} \gg \frac{\hbar^2}{32ma^2} \,, \tag{73}$$

sehingga:

$$4\kappa a \gg 1 \tag{74}$$

dan akibatnya, lihat persamaan (64), peluang terobosan sangat kecil ($|T|^2 \to 0$). Dengan demikian, apabila benar kita amati energi kinetik bernilai negatif (dan ini sesuatu yang bertentangan dengan fisika), efek terobosan sesungguhnya juga tidak terjadi (peluangnya sangat kecil), dan apabila efek terobosan tidak terjadi, tidak perlu lagi kita khawatir dengan atau mempertanyakan keberadaan partikel bergerak dengan energi kinetik negatif. Sebaliknya, jika efek terobosan terjadi, energi kinetik negatif tidak teramati (karena ketelitian pengamatan energi kinetik lebih besar dari nilai mutlak energi kinetik yang mungkin).